ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE CONSTANTINE
ALGEBRE 2

Exercices solutionnés

Exercice 1: Etudier le sous ensemble $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2) = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution:

On a ce qui suit: $(x, y, z) \in V \iff z \cdot (x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow (z = 0)$ ou $(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$ ou $(x = y = 0)$.

Ainsi pour $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ on a bien $(x, y, 0) \in V$. et $(0, 0, z) \in V$.cependant leur somme $(x, y, 0) + (0, 0, z) = (x, y, z)$ n'appartient pas à V Ce qui traduit la non stabilité de la somme dans V. On conclut que V n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.$\blacksquare$

Exercice 2: 1- Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner la dimension de U.

Solution

Certes, $(x, y, z) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x$ et $z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, -x, 0) = x(1, -1, 0)$. On déduit alors que le vecteur non nul $(1, -1, 0)$ est un système génerateur et libre de U, par conséquent la dimension de U est un.$\blacksquare$

Exercice 3: Trouver une condition necessaire et suffisante afin que $(x, y, z) \in l\{(1, 0, 2); (2, 3, 1)\}$.

Solution

.On a ce qui suit $(x, y, z) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(2, 3, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 3\beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$
$\beta = \frac{y}{3}$, $\alpha = x - \frac{2}{3}y$ et $\mathbf{z} = \mathbf{2x} - \mathbf{y}$. Ainsi

$$l\{(1, 0, 2); (2, 3, 1)\} \subseteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z} = \mathbf{2x} - \mathbf{y}\right\}$$

. On verifie aisément que $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z}=\mathbf{2x}-\mathbf{y}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui pour base le système $(1,0,2),(0,1,-1)$ car ce système est libre (verifier) et $(x,y,2x-y)=x(1,0,2)+y(0,1,-1)$ autrement dit generateur de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z}=\mathbf{2x}-\mathbf{y}\}$

Le vecteur $(0,1,-1)$ pour $\beta=\frac{y}{3}=\frac{1}{3}$ et $\alpha=x-\frac{2}{3}y=-\frac{2}{3}$ satisfait $(0,1,-1)=-\frac{2}{3}(1,0,2)+\frac{1}{3}(2,3,1)$. autrement dit $(1,0,2);(0,1,-1)$ $\in l\{(1,0,2);(2,3,1)\}$ et donc

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z}=\mathbf{2x}-\mathbf{y}\right\}\subseteq l\{(1,0,2);(2,3,1)\}$$

En somme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{z}=\mathbf{2x}-\mathbf{y}\}=l\{(1,0,2);(2,3,1)\}$ ce qui traduit qu'un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ est un vecteur de $l\{(1,0,2);(2,3,1)\}$ si et seulement si $z=2x-y$.$\blacksquare$

Exercice 4:

1- Montrer que les polynomes formels $1,X,...,X^n$ sont libres dans $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire la dimension du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

2-Le système de vecteurs $w_1=5-2X+X^2$; $w_2=-3X+2X^2$, $w_3=3+X$ est il une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Le système $w_1=5-2X+X^2$; $w_2=-3X+2X^2$, $w_3=3+X$, $w_4=-3+4X+X^2$ est il générateur de $\mathbb{R}_2[X]$ est il libre. Quel vecteur peut s'exprimer en fonction des autres.

Solution

1- Soient $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ et considérons $\alpha_0\cdot 1+\alpha_2\cdot X+...+\alpha_n\cdot X^n=0$ ce qui fournit $\alpha_0\cdot(1,0,...)+\alpha_1\cdot(0,1,0,...)+...+\alpha_n\cdot(0,0,0,...,1,0,...)=(0,0,...)$ d'où $(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n,0,...)=(0,0,...)$ on conclut $\alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_n=0$.

Si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg P\leq n$ donc $P=(a_0,a_1,...,a_k,0,...)$ avec $k\leq n$. Ce qui exprime que tout polynome $P(X)=a_0+a_1X+...+a_kX^k$ ave $k\leq n$. Ainsi tout polynome de $\mathbb{R}_n[X]$ s'exprime sous la somme générale $P(X)=a_0+a_1X+...+a_nX^n$ (pour les polynomes de degrés k strictement inférieurs à n il suffit prendre tous les scalaires nuls au dela de l'indice k).

On concult que le système de vecteurs $1,X,X^2,...,X^{n.}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[X]=n+1$.

2- Pour que $w_1=5-2X+X^2$; $w_2=-3X+2X^2$, $w_3=3+X$ soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$ il suffit que ce systeme soit libre.

Le polynome w_2 n'est pas une combinaison linéaire de w_1: il n'existe pas de scalaire $\alpha\in\mathbb{R}$ avec $w_2=\alpha w_1$ (vérifier) Etudions l'équation $w_3=$

$\alpha w_1 + \beta w_2$ qui fournit le système :

$$\begin{cases} 5\alpha = 3 \\ -2\alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

le système

$$\begin{cases} -2\alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

admet la solution unique $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ qui ne satisfait pas l'éqaution $5\alpha = 3$. On conclut que le système w_1, w_2, w_3 est libre donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ lequel vérfie $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3$.

Le système w_1, w_2, w_3, w_4 est un sur systeme du systeme w_1, w_2, w_3 donc c'est un système generateur de $\mathbb{R}_2[X]$ et ainsi le vecteur w_4 est une combinaison linéaire de w_1, w_2, w_3.

Exercice 5:

1- Montrer que les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 2, 0)$ et $w_3 = (2, -1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2- Donner les coordonnées du vecteurs $u = (4, 2, 2)$ dans la base canonique.

2- Evaluer la somme $w_1 + w_2 + w_3$. Donner les corrdonnées de u dans la base $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$.

3- Existe il un scalaire $k \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $(3, 0, 2)$, $(2, 1, 0)$, $(1, k, 1)$ soient un système lié de $\mathbb{R}^3$.

4- Prolonger le système de vecteurs $(3, 0, 2)$, $(2, 1, 0)$ a une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution:

1-En effet l'équation $(0, 0, 0) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(2, -1, 1)$ conduit au système:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières equations on a $3\gamma = 0$ qui fournit $\gamma = 0$ lequel substitué à la troisième équation assume $\alpha = 0$ et enfin par substitution dans une deux deux premières égalités confirme que $\beta = 0$. Ainsi le système est libre donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2- La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)$ et on a : $u = (1,-1,2) = 1(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+2(0,0,1)$ ainsi le coordonnées de u dans la base canonique sont :$1,-1,2$.

D'autre part: $w_1 + w_2 + w_3 = (1,1,1) + (1,2,0) + (2,-1,1) = (1+1+2, 1+2-1, 1+0+1) = (4,2,2)$. On déduit de l'égalité que $u = w_1 + w_2 + w_3$ donc les coordonnées de u dans cette base sont: $1,1,1$.

3- Le vecteur $(3,0,2)$ est libre et $(2,1,0)$ n'est pas une combinanison linéaire de $(3,0,2)$ car il n'existe pas de scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaisant: $\alpha(3,0,2) = (2,1,0)$.Ainsi $(3,0,2)$, $(2,1,0)$, $(1,k,1)$ est lié si et seulement si l'équation ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $(1,k,1) = \alpha(3,0,2) + \beta(2,1,0)$. On a ainsi :

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 1 \\ \beta = k \\ 2\alpha = 1 \end{cases}$$

D'où en substituant $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{4}$.la seconde équation impose $k = -\frac{1}{4}$. On conclut que pour $k = -\frac{1}{4}$ le système est lié.

4- Le système $(3,0,2)$, $(2,1,0)$ est libre car $(2,1,0)$ n'est pas une combinaison linéaire de $(3,0,2)$ pour le prolonger à une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de lui affecter un troisième vecteur afin d'obtenir un sytème libre. De la question précédente pour $k \neq -\frac{1}{4}$ constate que on l'équation $(1,k,1) = \alpha(3,0,2) + \beta(2,1,0)$ autrement dit pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ le système de vecteurs est libre. Ainsi, $(3,0,2)$, $(2,1,0), (1,k,1)$ à une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.$\blacksquare$

Exercice 6:

1- Montrer que le systeme G : $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (1,-1,2)$, $u_3 = (0,3,-4)$ est un système lié.donner la dimension de $l(G)$.

2- Montrer que la somme $l(u_1) + l(u_2)$ est directe. est elle supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$.

<u>Solution</u>

1- Le vecteur u_2 ne peut pas etre une combinaison linéaire de u_1 (executer les calculs) considérons alors l'équation $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$ qui offre le systeme:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 3 \\ 2\beta = -4 \end{cases}$$

ainsi les deux dernières equations informent que: $\beta = -2$ et $\alpha = 1$ qui satisfont la première equation. On conclut que $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 2)$, $u_3 = (0, 3, -4)$ est un système lié puisque $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 2)$, $u_3 = (0, 3, -4)$ engendre $l(G)$ est que G est un sur sytème du système $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ donc u_1, u_2 engendre $l(G)$ ils sont en plus libres donc ils constituent une base de $l(G)$ dont la dimension est donc égale à deux.

L'équation $(0, 0, 0) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, -1, 2)$ conduit à:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\beta = 0 \end{array} \right.$$

qui admet pour solution unique $\alpha = \beta = 0$. On conclut que la somme $l(u_1) + l(u_2) = l(u_1) \oplus l(u_2)$.

Leur somme n'est pas supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ car $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \neq \dim_{\mathbb{R}} l(G)$.■

Exercice 7:

1- Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ sont deux sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. et donner les dimensions de U et V.

2- Sont ils supplémentaire de $\mathbb{R}^3$.

Solution

1-a) On $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. On vérifie alors aisément la stabilité de la somme et de la loi externe sur U. (à faire...).

De meme: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. On verifie sans peine la stabiloté de la somme et de la loi externe sur V.(à faire...).

b) $u \in U \Leftrightarrow u = (x, x, x)$ tel que $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u = x(1, 1, 1)$ tel que $x \in \mathbb{R}$. On conclut que $(1, 1, 1)$ est un système générateur de U qui plus est ce dernier est non nul ainsi libre et donc est une base de U qui est dés lors de dimension un.

$v \in V \iff v = (0, y, z)$ où $y, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow v = (0, y, 0) + (0, 0, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ où $y, z \in \mathbb{R}$. On déduit que le système $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ est générateur de V. Enfin, l'equation $(0, 0, 0) = x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1)$ conduit à $x = y = 0$. Ainsi $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ est une base de V qui est donc de dimension deux.

2- Le système $(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ est un système libre: l'equation $\alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ est équivalente au système trivial

$\alpha = \beta = 0$. Ainsi ce système est une base de $\mathbb{R}^3$ on conclut que $U \oplus V = \mathbb{R}^3$ cad qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.