ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE CONSTANTINE
ANNEE PREPARATOIRE
ALGEBRE II

Exercices solutionnés

Exercice 1:

Existe t il $m \in \mathbb{R}$ afin que le système des deux vecteurs $(1,-1,2),(2m,1,-m)$ forme une base de $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$?

Le système donné peut il etre prolongé à une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution:

A- Le système de deux vecteurs $(1,-1,2),(2m,1,-m)$ indépendement de m ne peut pas constituer une base de $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ car $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ qui est le nombre minimal de vecteurs qui peuvent l'engendrer.

B1- Afin de prolonger le système donné: $(1,-1,2),(2m,1,-m)$ à une base de $\mathbb{R}^3$, il est nécessaire qu'il soit libre par la suite il suffit de le prolonger à une base de $\mathbb{R}^3$ par la concaténation d'un seul vecteur.

B2: Le système $(1,-1,2),(2m,1,-m)$ est lié si $(2m,1,-m) = k\cdot(1,-1,2)$ avec $k \in \mathbb{R}$.d'où $2m = k$, $1 = -k$ et $-m = 2k$. On a alors $k = -1$ et $k = 0$ ce qui est impossible ce qui traduit que le système $(1,-1,2),(2m,1,-m)$ est libre pour toute valeur de $m \in \mathbb{R}$. Il suffit d'y concaténer un vecteur qui n'appartient pas à $l((1,-1,2),(2m,1,-m))$. Un tel vecteur peut etre $(2,0,-1)$. Le système de trois vecteur $(1,-1,2),(2m,1,-m),(2,0,-1)$ est une base de $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ pour toute valeur de $m \in \mathbb{R}$.$\blacksquare$

Exercice 2:

Montrer que les deux sous espaces vectoriels $E_1 = l\{(2,3,-1);(1,-1,-2)\}$ et $E_2 = l\{(3,2,-3);(5,5,-4)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sont égaux.

Solution:

Montrons que $\{(2,3,-1);(1,-1,-2)\} \subset E_2$. En effet, $(2,3,-1) = k\cdot(3,2,-3) + k'\cdot(5,5,-4)$ conduit à $k = -1$ et $k' = 1$et $(1,-1,-2) = x\cdot(3,2,-3) + y\cdot(5,5,-4)$ fournit $x = 2$ et $y = -1$.

D'autre part, le système $(3,2,-3);(5,5,-4)$ est libre car $(5,5,-4) \notin l(3,2,-3)$ donc E_2 est un plan vectoriel qui plus est le système de deux vecteurs $(2,3,-1);(1,-1,-2)$ de E_2 est libre donc il forme une base de E_2et donc $E_1 = l\{(2,3,-1);(1,-1,-2)\} = E_2 = l\{(3,2,-3);(5,5,-4)\}$.

Exercice 3:

1- Montrer que $\widehat{\mathbb{R}}_n[x] = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \text{ où } a_0, a_1..., a_n \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2- Montrer que la correspondance $\Psi : \mathbb{R}_n[x] \to \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ où $\Psi(P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n) = P$ tel que : $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$; est une application linéaire injective et surjective.

3- Donner une base et la dimension de $\widehat{\mathbb{R}}_n[x]$

4- Montrer que l'application $f : \widehat{\mathbb{R}}_n[x] \to \mathbb{R}$ ou $f(P) = P(3)$ est une application linéaire

5-.Donner la dimension de $\operatorname{Im} f$.

6- Pour $n = 3$ donner une base et la dimension du noyau de f

Solution:

A- On sait que $\mathbb{R}^X$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ où X est un ensemble, en particulier si $X = \mathbb{R}$ l'ensemble$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\right)$ est un espace vectoriel. On a $\widehat{\mathbb{R}}_n[x] \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Il est evident que $\widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ n'est pas vide:(par exemple : il contient les applications constantes sur $\mathbb{R}$).

Si $P, Q \in \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ où $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$ alors$(P+Q)(x) \overset{sommede\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}{=} P(x) + Q(x) = (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$ où $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ pout tout $i \in \overline{0,n}$.ce qui traduit que $P + Q \in \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$. D'autre part, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T \in \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ avec $T(x) = t_0 + t_1 x + ... + t_n x^n$ où $t_i \in \mathbb{R}$ pout tout $i \in \overline{0,n}$ alors $(\alpha P)(x) \overset{loiexternede\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}{=}$

$= \alpha P(x) = \alpha(t_0 + t_1 x + ... + t_n x^n) = \underbrace{\alpha t_0} + \underbrace{\alpha t_1} x + ... + \underbrace{\alpha t_n} x^n$ avec $\alpha t_i \in \mathbb{R}$ pout tout $i \in \overline{0,n}$. On déduit que $\alpha T \in \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$. Conclusion $\widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ est stable pour la loi interne et externe définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $\widehat{\mathbb{R}}_n[x] \underset{l}{\subseteq} \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

B-Qui plus est, si $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ et $Q = b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n$ sont deux elements de $\widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ alors $P + Q = (a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n) + (b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_n + b_n)X^n$ donc

$\Psi(P+Q) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)+ (b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) = \Psi(P) + \Psi(Q)$.

D'autre part, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ alors $\Psi(\lambda T) = \Psi(\lambda(a_0 + a_1X + ... + a_nX^n)) = \Psi(\lambda a_0 + \lambda a_1X + ... + \lambda a_nX^n)) =$
$= \lambda a_0 + \lambda a_1x + ... + \lambda a_nx = \lambda(a_0 + a_1x + ... + a_nx) = \lambda\Psi(T)$.

Conclusion $\Psi : \mathbb{R}_n[x] \to \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ est une application linéaire.

On a $\Psi(\mathbb{R}_n[x]) = \Psi(\{P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \mid a_0, a_1..., a_n \in \mathbb{R}\}) = \{\Psi(P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n) \mid a_0, a_1..., a_n \in \mathbb{R}\} =$
$= \{P : \mathbb{R} : \mathbb{R} \mid P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ où $a_0, a_1..., a_n \in \mathbb{R}\} = \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$.

Ainsi: $\operatorname{Im}\Psi = \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ qui traduit que Ψ est un épimorphisme.

Détermination du noyau: $\ker\Psi = \Psi^{-}(0) =$
$= \{P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[x] \mid a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\} = \left\{\theta_{\mathbb{R}_n[x]}\right\}$ où $\theta_{\mathbb{R}_n[x]}$ est le polynome formel nul.

Du fait que $\ker\Psi = \left\{\theta_{\mathbb{R}_n[x]}\right\}$ donc Ψ est un monomorphisme.

C- Etant donné que $\Psi : \mathbb{R}_n[x] \to \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ est un isomorphisme donc l'image d'une base de $\mathbb{R}_n[x]$ en est une pour $\widehat{\mathbb{R}}_n[x]$. Puisque $1, X, ..., X^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ donc:

$\Psi(1) = 1, \Psi(X) = x, ..., \Psi(X^n) = x^n$ est une base de $\widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ et $\dim_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbb{R}}_n[x] = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

D-Pour tout $P, Q \in \widehat{\mathbb{R}}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a les egalités suivantes:

$$f(P + Q) = (P + Q)(3) = P(3) + Q(3) = 0 + 0 = 0$$

et

$$f(\beta P) = (\beta P)(3) = \beta P(3) = \beta.0 = 0$$

qui confirment que f est linéaire.

E- $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc $\dim \operatorname{Im} f$ est zero ou 1.Puique f n'est pas nulle donc $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

F- $\ker f = \left\{P \in \widehat{\mathbb{R}}_3[x] \mid f(P) = 0\right\} =$
$= \left\{P \in \widehat{\mathbb{R}}_3[x] \mid P(3) = 0\right\} = \left\{P \in \widehat{\mathbb{R}}_3[x] \mid (x - 3) \text{ divise } P\right\} =$
$= \{(x - 3)(ax^2 + bx + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} =$
$= \{c(x - 3) + b(x^2 - 3x) + a(x^3 - 3x^2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = l((x-3), (x^2-3x), (x^3-3x^2))$.

Le système $(x-3), (x^2-3x), (x^3-3x^2)$ engendre $\ker f$ de plus de l'équation du rang on a $\dim\ker f = \dim \widehat{\mathbb{R}}_3[x] - \dim \operatorname{Im} f = 3$ on conclut que le système

$(x-3),(x^2-3x),(x^3-3x^2)$ est libre et donc une base de $\ker f$ qui est ainsi de dimension 3.$\blacksquare$

Exercice 4:

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 où le système $B: e_1;$ e_2, e_3 est une base donnée.

1- Calculer les coordonnées $f(x)$ dans la base B si $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$.et $f: E \to E$ est une application linéaire caracterisé par; $f(e_1)=e_1+e_2;$ $f(e_2)=e_1-e_2$ et $f(e_3)=e_1+k\cdot e_3$.

2- Trouver $k\in\mathbb{R}$ tel que f soit un monomorphisme , un epimorphisme.

Solution:

A- $f(x)=f(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)=\alpha_1f(e_1)+\alpha_2f(e_2)=\alpha_1(e_1+e_2)+\alpha_2(e_1-e_2)=(\alpha_1+\alpha_2)e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2$.

B- f est un monomorphisme si et seulement si f est un épimorphise si et seulement si $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$ forment un système libre. Pour ce faire trouvons k afin que ces vecteurs soient liés:

$f(e_1)=e_1+e_2$; $f(e_2)=e_1-e_2$ est un système libre car e_1-e_2 n'est pas une combinaison linéaire de e_1+e_2. Il n'existe pas de α satisfaisant : $e_1-e_2=\alpha\cdot(e_1+e_2)$ (résoudre pour s'en convanicre).

Analysons s'il existe $k\in\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation $e_1+k\cdot e_3=\alpha\cdot(e_1+e_2)+\beta\cdot(e_1-e_2)$ pour $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On a alors $(1-\alpha-\beta)e_1+(-\alpha+\beta)e_2+ke_3=\theta$ d'où $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ et $k=0$.

On conclut que pour $k\in\mathbb{R}^*$ le système $f(e_1)=e_1+e_2$; $f(e_2)=e_1-e_2$ et $f(e_3)=e_1+k\cdot e_3$ est libre donc f est un isomorphisme.$\blacksquare$

Exercice 5:

1- Trouver le noyau et l'image de l'application linéaire $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ où $f(x,y)=(x+y,3x)$.

2- L'application linaire f est elle injective, surjective?

Solution:

A- $\ker f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(x+y,3x)=(0,0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y=0\}=\{(0,0)\}$.

B- On déduit que f est un endomorphisme injectif donc un isomorphisme où $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$.$\blacksquare$

Exercice 6: Trouver le noyaux et l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ où $f(x,y,z) = 3x - 2y + z$. Cette application linaire est elle injective, surjective.

Solution:

On a ce qui suit: $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid 3x - 2y + z = 0\} = \{(x, y, 3x - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 3x) + (0, y, -2y \mid x, y \in \mathbb{R}\} = l((1,0,3),(0,1,-2))$. Le système $(1,0,3),(0,1,-2)$ est libre $(0,1,-2) \notin l(1,0,3)$. On conclut que $\dim \ker f = 2$. Cette application linéaire n'est pas un monomorphisme.

Enfin : $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ l'application f n'est pas nulle donc $\dim \operatorname{Im} f = 1$ donc f est un épimorphisme

Exercice 7: L'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ où $f(x,y,z) = (x + y + z, y + z, x + 2y - z)$.est elle un isomorphisme. Donner $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Solution:

Les images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont: $f(1,0,0) = (1,0,1)$; $f(0,1,0) = (1,1,2)$ et $f(0,0,1) = (1,1,-1)$.

Le système de vecteurs obtenu: $(1,0,1)$, $(1,1,2)$; $(1,1,-1)$ est libre (vérifier) donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ donc f est un isomorphisme d'où $\ker f = \{\theta = (0,0,0)\}$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.■

Exercice 8: On considère un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ caractérisé par : $\varphi(1,0) = (-5,10)$ et $\varphi(0,1) = (-3,6)$.

1- φ est il un isomorphisme ,

2- Montrer $\ker \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$.

3- Trouver $\varphi \circ \varphi$.

Solution:

1- Le système $\varphi(1,0) = (-5,10)$, $\varphi(0,1) = (-3,6)$ n'est pas libre car $(-3,6) = \frac{3}{5} \cdot (-5,10)$ on conclut que φ n'est pas un isomorphisme..

2- $\ker \varphi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) = (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \varphi(1,0) + y \cdot \varphi(0,1) = (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-5x - 3y, 10x + 6y) = (0,0)\} =$
$= \left\{(x, -\frac{5}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = l(1, \frac{5}{-3}) = l(-3,5)$. Ainsi, $\dim \ker f = 1$. et alors $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

$\operatorname{Im} f = \{(-5x - 3y, 10x + 6y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (-5, 10) + y(-3, 6) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = l((-5, 10), (-3, 6)) = l(-3, 6)$.

On conclut que $(-3, 5)$ est une base de $\ker f$ et $(-3, 6)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. D'autre part, le système $(-3, 5), (-3, 6)$ est libre donc c'est une base de leur somme qui est alors directe de plus puisque $\dim(\operatorname{Im} f + \ker f) = 2$ $= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ donc la somme de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ est supplémentaire dans $\mathbb{R}^2$.

3- Il suffit de constater que :$\varphi \circ \varphi(1, 0) = (-5, 10) = \varphi(1, 0)$ et $\varphi \circ \varphi(0, 1) = (-3, 6)) = \varphi(0, 1)$. d'ou $\varphi \circ \varphi = \varphi$.■

<u>Exercice 9:</u> Pour $m \in \mathbb{R}$ on définit f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par: $f_m(1, 0, 0) = (m, 1, 0)$; $f_m(0, 1, 0) = (m+6, m+2, 0)$ et $f_m(0, 0, 1) = (0, 0, m)$.

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m n'est pas un épimorphisme.

<u>Solution:</u>

Pour ce faire, trouvons m afin que f_m soit un isomorphisme. Il suffit d'analyser l'indépendanace du système de vecteurs : $f_m(1, 0, 0) = (m, 1, 0)$; $f_m(0, 1, 0) = (m + 6, m + 2, 0)$, $f_m(0, 0, 1) = (0, 0, m)$

La combinaison linéaire $\alpha \cdot (m, 1, 0) + \beta \cdot (m + 6, m + 2, 0) + \lambda \cdot (0, 0, m) = (0, 0, 0)$ donne $m\alpha + \beta(m+6) = 0$ et $\alpha + \beta(m+2) = 0$ et $\lambda m = 0$. Qui fournit: $\beta(m^2 + m - 6) = 0$ et $\alpha = \beta(-m - 2)$ et $\lambda m = 0$. Pour $m \notin \{-3, 2\}$ on a $m^2 + m - 6 \neq 0$ et donc $\beta\,(m^2 + m - 6) \neq 0$ uniquement pour $\beta = 0$ d'où $\alpha = 0$ sans condition sur m. Enfin pour $m \neq 0$ l'équation $\lambda m = 0$ est satisfaite uniquement pour $\lambda = 0$. En somme pour $m \notin \{0, -3, 2\}$ on a forcement $\alpha = \beta = \lambda = 0$ qui traduit que f_m est un isomorphisme. Conclusion pour $m \in \{0, -3, 2\}$ l'endomorphiqme f_m n'est pas un épimorphisme.

<u>Exercice 10:</u> On considère $(E, \mathbb{R})$ et $(F, \mathbb{R})$ deux espaces vectoriels de bases $B = (e_1, e_2, e_{3)}$ et $B' = (w_1, w_2)$ respectivement et $f : E \to F$ une application linéaire où $f(e_1) = 2w_1 - w_2, f(e_2) = -w_1 + 2w_2$ et $f(e_3) = -w_1 + w_2$.

1- Déterminer l'image de tout vecteur de E,

2- Déterminer le rang de f et caractériser $\ker f$.

<u>Solution:</u>

1- Si $x = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3$ alors $f(x) = \alpha_1 \cdot f(e_1) + \alpha_2 \cdot f(e_2) + \alpha_3 \cdot f(e_3) = \alpha_1 \cdot (2w_1 - w_2) + \alpha_2 \cdot (-w_1 + 2w_2) + \alpha_3 \cdot (-w_1 + w_2) = (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3).w_1 + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3).w_2$.

2-Le système $f(e_1) = 2w_1 - w_2, f(e_2) = -w_1 + 2w_2$ et $f(e_3) = -w_1 + w_2$.engendre $\operatorname{Im} f$: en effet tout vecteur de $\operatorname{Im} f$ en est une combinaison linéaire. Cependant, le sytème n'est pas libre on peut le réduire.en une base de $\operatorname{Im} f$. Le vecteur $f(e_2) = -w_1 + 2w_2$ n'est pas une combinaison linéaire de $f(e_1) = 2w_1 - w_2$, cependant $f(e_3) = -w_1 + w_2$ est une combinaison linéaire de $f(e_1) = 2w_1 - w_2, f(e_2) = -w_1 + 2w_2$. En effet, l'equation $x \cdot f(e_1) + y \cdot f(e_2) = f(e_3)$ equivalente à $x \cdot (2w_1 - w_2) + y \cdot (-w_1 + 2w_2) = (-w_1 + w_2)$ donne pour solution $x = -\frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$. Alors le système reduit $f(e_1) = 2w_1 - w_2, f(e_2) = -w_1 + 2w_2$ est generateur et libre de $\operatorname{Im} f$ donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$ donc $rang(f) = \dim \operatorname{Im} f = 2$.

D'autre part;

$\ker f = \{u = (\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3) \in E \mid (2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = 0 \text{ et } (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0\} =$
$= \{u = \alpha_1 \cdot e_1 - \alpha_2 \cdot e_2 + 3\alpha_1 \cdot e_3 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}\} =$
$= \left\{ u = \alpha_1 \cdot \underbrace{(e_1 - e_2 + 3 \cdot e_3)} \mid \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\} = l\,\underbrace{(e_1 - e_2 + 3 \cdot e_3)}$ d'où $\dim \ker f = 1$.