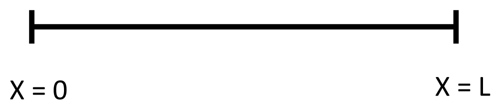
Suite du chapitre 02 : La corde et la membrane vibrante

1.2.2 Le cas d'une perturbation quelconque sur une corde finie

Dans le premier cas, nous avons supposé que la perturbation avait une forme sinusoïdale : $u(x,t) = f(x)sin(\omega t)$.

Dans le cas présent, les seules informations dont nous disposons sont d'abord les conditions aux limites pour une corde finie (longueur L) dont les extrémités sont fixes :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \dots (1) \\ u(L,t) = 0 \dots (2) \end{cases}$$



Puis, nous savons aussi que la fonction $u(x,t)$ doit vérifier l'équation de propagation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, avec $c = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}$.

On va utiliser la technique de séparation des variables en supposant que :

$$u(x,t) = f(x).g(t)$$

En injectant cette forme dans l'équation de propagation, nous obtenons :

$$f''.g - \frac{1}{c^2}f.g'' = 0,$$

Que nous pouvons mettre sous la forme suivante :

$$c^2\frac{f''}{f} = \frac{g''}{g}$$

Puisque les deux fonctions f et g dépendent de variables différentes, la seule possibilité pour que l'équation ci-dessus soit satisfaite c'est que les deux membres de l'équation doivent égaler une même constante. Cette constante, dite de séparation, doit nécessairement être négative. Dans le cas contraire, il n'existe pas de solution physique au problème. Soit donc – k^2 cette constante :

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2}.\frac{g''}{g} = -k^2$$

On obtient alors les 02 équations suivantes :

$$\begin{cases} f'' + k^2 f = 0 \\ g'' + (k.c)^2 g = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont donc

$$\begin{cases} f(x) = Asin(k.x) + Bcos(k.x) \\ g(t) = A' \sin(k.c.t) + B' \cos(k.c.t) \end{cases}$$

Remarque

Du point de vue dimensionnel, il est clair que la constante $\boldsymbol{k}$ doit être l'inverse d'une longueur. On comprend alors que k doit être le nombre d'onde et que $\boldsymbol{k.c}$ doit être la pulsation.

Maintenant, pour déterminer les constantes A et B nous devons utiliser les conditions aux limites (1) et (2). On a alors :

(1)→ B = 0

(2) → A ≠ 0 et $sin(k.L) = 0$, d'où $k.L = n.\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

On a donc : $\boldsymbol{k_n = n.\frac{\pi}{L}}$.

Nous n'avons pas seulement une forme possible de $f(x)$ mais plutôt une infinité. Par conséquent,

$$f_n(x) = A_n sin(k_n.x),$$

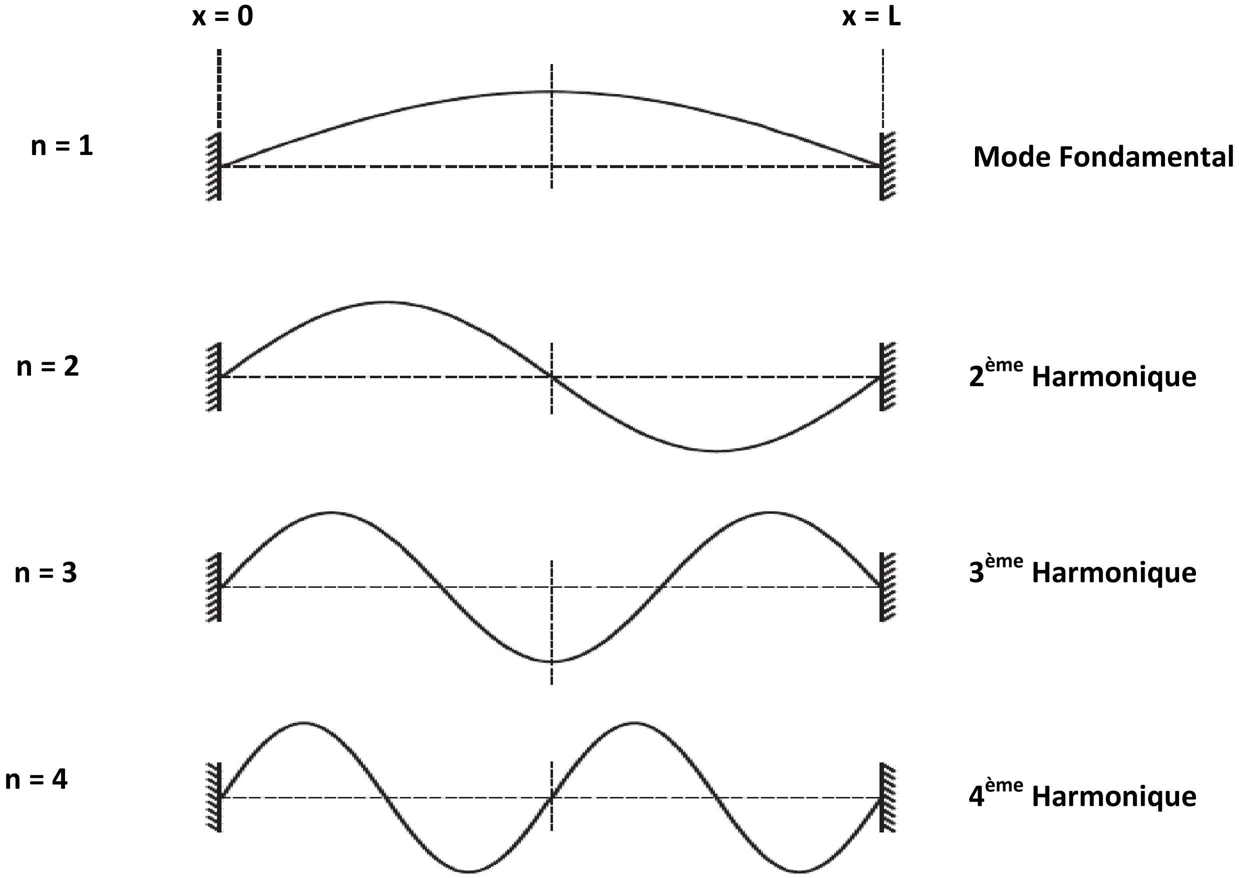
et par suite, pour écrire $u(x,t)$, nous devons sommer sur tous les entiers n, tel que :

$$u(x,t) = \sum_n sin(k_n.x)[a_n \sin(\omega_n.t) + b_n \cos(\omega_n.t)] \ldots.(S)$$

avec $k_n = \frac{\omega_n}{c}$, $a_n = A_n.A'$ et $b_n = A_n.B'$.

<u>Représentation spatiale des modes de vibrations d'une corde</u>

Avant de continuer plus loin dans la détermination de la solution $u(x,t)$, il est utile de s'arrêter sur la représentation spatiale des modes de vibrations d'une corde. En effet, pour un instant "t" donné, la partie spatiale de la solution $u(x,t)$ montre les formes suivantes pour les quatre premières valeurs de l'entier naturel n :



<u>La solution complète</u>

La solution (S) n'est pas finale, car nous ne connaissons pas encore les valeurs des coefficients a_n et b_n. Nous avons donc besoin d'informations supplémentaires, en l'occurrence, la forme de la corde à l'instant initial $(t = 0\ s)$ et la façon avec laquelle nous avions communiqué la perturbation à la corde à l'instant initial (vitesse initiale). Pour la simplicité, supposons que :

$$\begin{cases} u(0,x) = h(x) \ldots (3) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \ldots (4) \end{cases}$$

où $h(x)$ est une fonction qu'on connaît. La condition (4) nous indique d'abord que : $a_n = 0$. Il s'ensuit que :

$$u(x,t) = \sum_n b_n sin(k_n.x)\cos(\omega_n.t)$$

Pour la condition (3), nous avons :

$$u(x,o) = h(x) = \sum_n b_n sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right)$$

Pour déterminer b_n, nous allons utiliser la propriété d'orthogonalité des fonction sinus et cosinus. Multiplions d'abord par $sin\left(m.\frac{\pi}{L}.x\right)$ et intégrons ensuite de 0 à L :

$$\int_0^L h(x)sin\left(m.\frac{\pi}{L}.x\right)dx = \sum_n b_n \int_0^L sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right)sin\left(m.\frac{\pi}{L}.x\right)dx$$

En rappelant que :

$$\int_0^L sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right)sin\left(m.\frac{\pi}{L}.x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

où δ_{nm} est appelé symbole de Kronecker avec les propriétés importantes suivantes :

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & si\ n = m \\ 0, & si\ n \neq m \end{cases}$$

Et

$$\sum_n O_n\,\delta_{nm} = O_m$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\int_0^L h(x)sin\left(m.\frac{\pi}{L}.x\right)dx = \frac{L}{2}b_m$$

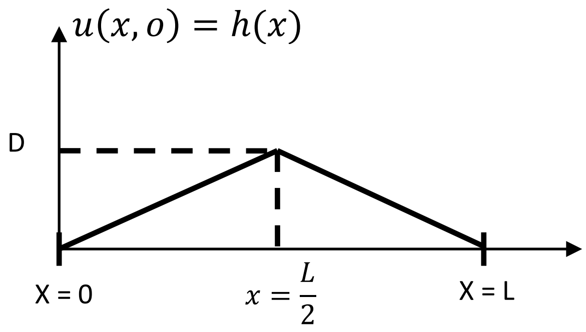
Plus simplement, nous pouvons rétablir l'ancien indice et écrire finalement :

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right)dx$$

Ainsi, la solution $u(x,t)$ est complètement déterminée avec le calcul du coefficient b_n.

Application

On va utiliser les mêmes conditions initiales précédentes en supposant que :



La fonction $h(x)$ se présente donc sous la forme :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2D}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2D}{L}(x-L), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

En rappelant que :

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x) sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right) dx$$

Nous avons :

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2D}{L}\int_0^{L/2} x.\, sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right) dx + \frac{2D}{L}\int_{L/2}^{L} (x-L).\, sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right) dx\right]$$

L'intégration par partie des deux intégrales donne le résultat recherché.

2. Les Ondes stationnaires sur une corde finie

En reprenant l'exemple précédent dans les mêmes conditions, la solution à l'équation d'onde s'exprime donc sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_n b_n sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right)\cos\left(n.\frac{\pi.c}{L}.t\right)$$

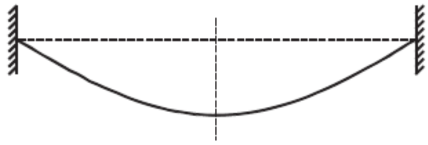
C'est une onde qui est confinée dans l'espace $[0, L]$. Elle ne voyage donc pas et c'est pour cette raison qu'on l'appelle onde stationnaire. Plus précisément, on peut montrer qu'une onde stationnaire est la résultante de la superposition d'une onde progressive et d'une onde régressive. En effet, Nous pouvons mettre $u(x,t)$ sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_n \frac{b_n}{2}[sin(k_n.x - \omega_n.t) + sin(k_n.x + \omega_n.t)],$$

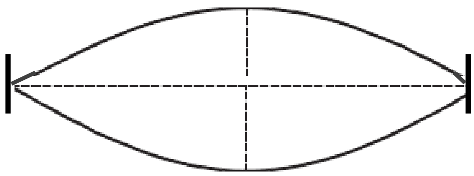
d'après laquelle nous voyons que chaque mode représente une onde progressive $sin(k_n.x - \omega_n.t)$ superposée à une onde régressive $sin(k_n.x + \omega_n.t)$. Pour la représentation spatiale, on rappelle que nous avions représenté auparavant la fonction $sin\left(n.\frac{\pi}{L}.x\right)$ pour les valeurs positives uniquement de l'entier n. En effet, pour $n = \pm 1$, par exemple, nous avons :

n =1

n = -1



Pour un instant "t" donné, la superposition de ces deux modes donne l'aspect suivant de la corde :



Nous pouvons répéter cela de la même manière pour tous les autres modes $n = \pm 2, \pm 3, etc.$

2. Energie transportée par une perturbation sur une corde vibrante

Soit une corde de longueur L, de tension T et de densité linéique ρ. Sur un segment de la corde de longueur δx, on peut montrer que l'énergie mécanique transporté s'écrit :

$$\delta E = \delta E_c + \delta E_p = \frac{1}{2}\rho.\delta x.\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T.\delta x.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Pour une corde de longueur L, l'énergie mécanique totale transportée durant une période spatiale s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

Pour le cas des conditions initiales déjà décrites plus haut, et en considérant le cas du mode n = 1, nous avons :

$$u(x,t) = b_1 sin\left(\frac{\pi}{L}.x\right)\cos\left(\frac{\pi.c}{L}.t\right),$$

et par conséquent, la période spatiale (longueur d'onde) est $\lambda_1 = 2L$, tandis que la pulsation est $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$. Nous aurons donc

$$E_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 b_1^2\left[sin^2\left(\frac{\pi c}{L}.t\right)\int_0^{2L} sin^2\left(\frac{\pi}{L}.x\right)dx + cos^2\left(\frac{\pi c}{L}.t\right)\int_0^{2L} cos^2\left(\frac{\pi}{L}.x\right)dx\right]$$

Après intégration, nous trouvons :

$$E_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 b_1^2(2L)$$

ou bien aussi :

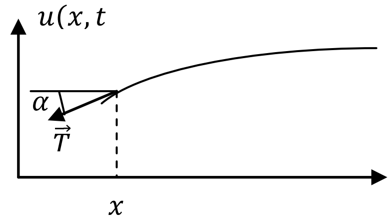
$$E_1 = \frac{1}{2}\rho\lambda_1{\omega_1}^2 b_1^2$$

Plus généralement, pour un mode "n" quelconque, l'énergie mécanique transportée par une onde sur une corde finie s'écrit :

$$E_n = \frac{1}{2}\rho\lambda_n{\omega_n}^2 b_n^2$$

3. La composante transverse de la force de rappel sur une corde vibrante

La tension agit comme une force de rappel sur la corde vibrante au passage d'une perturbation (onde). Lorsque le mouvement de chaque point de la corde est strictement vertical (transverse), c'est la composante transverse de la tension de la corde qui est significative. Considérons une portion de la corde que parcourt une perturbation :



Au point d'abscisse x, la composante transverse de la force de rappel s'écrit :

$$F_y = -T.sin\alpha$$

Pour de faibles déformations de la corde, nous pouvons écrire :

$$F_y \approx -T.tg\alpha$$

En un point de la corde, la composante transverse de la force de rappel s'écrit :

$$F_y = -T.\frac{\partial u}{\partial x}$$

3. Impédance caractéristique

On définit l'impédance caractéristique d'une corde vibrante par la relation :

$$Z = \frac{F_y}{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{-T.\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

Pour une onde progressive, par exemple, nous avons :

$$u(x,t) = u_0 cons(\omega t - kx)$$

Il est plus simple d'utiliser la notation complexe, telle que :

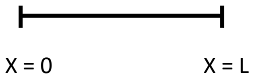
$$u(x,t) = u_0 exp[i(\omega t - kx)]$$

Par suite, l'impédance caractéristique est telle que :

$$Z = \frac{T.k}{\omega} = \frac{T}{c},$$

Ou bien, plus clairement : $\quad Z = \rho . c$

Exercice d'application



On considère une corde de longueur L, sur laquelle, une perturbation transversale $u(x,t)$ se propage à la vitesse c avec les conditions aux limite suivantes :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Montrer que la solution de l'équation de propagation pour le mode **n** est une onde stationnaire.

2) On maintenant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

a) Déterminer les amplitudes des deux premiers modes.

b) Déterminer l'énergie de la corde pour les deux premiers modes.