Prof. MOHDEB Zaher - ENPC

Ecole Nationale Polytechnique de Constantine 2019-2020
1^{ere} Année classe préparatoire

Série de T.D. n° 3 de Probabilités (Semestre 2)

Exercice I- Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ et F_X sa fonction de répartition. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$.

Exercice II- Soit X une variable aléatoire dont la loi admet pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1) Evaluer : *i)* la constante c, *ii)* $P(X < 2)$, *iii)* $P(1/2 < X < 3/2)$.
2) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Exercice III- Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par l'expression suivante

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cx^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3\,. \end{cases}$$

Si $P(X = 3) = 0$, trouver : *i)* la constante c, *ii)* la densité de probabilité de la loi de X, *iii)* $P(X < 1)$, *iv)* $P(1 < X < 2)$.

Exercice IV- Soit X la variable aléatoire représentant la taille des individus d'une population donnée. On suppose que X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
1) On choisit un individu au hasard de cette population. Quelle est la probabilité pour que sa taille soit supérieure à : *i)* m ? *ii)* $m + \sigma$? *iii)* $m + 2\sigma$? *iv)* $m + 3\sigma$?
2) En déduire les valeurs des probabilités suivantes : *i)* $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$, *ii)* $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$, *iii)* $P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma)$.
3) On prend un échantillon au hasard de 20 individus de cette population. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'individus de taille supérieure à $m + \sigma$.
3-1) Quelle est la loi de probabilité de Y.
3-2) Quelle est la probabilité de trouver au moins un individu de taille supérieure à $m + \sigma$.
4) On suppose que $P(X \leq 1,68) = 0,8413$ et $P(X \geq 1,76) = 0,0228$. Déterminer la valeur de la moyenne m et de son écart-type σ.
<u>Indication</u> : Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ de fonction de répartition Φ, on a : $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(2) = 0,9772$ et $\Phi(3) = 0,9987$.

Prof. MOHDEB Zaher . ENPC

Ex.I $X \sim U_{[a,b]}$, $Y = \frac{X-a}{b-a}$

Soit F_Y la f.r. de la v.a. Y, on a : $\forall y \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-a}{b-a} \leq y\right) = P(X \leq a + (b-a)y)$$
$$= F_X[a+(b-a)y].$$

Sa d.d.p. $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X[a+(b-a)y]$

$$= (b-a) F'_X[a+(b-a)y]$$

$$f_Y(y) = (b-a) f_X[a+(b-a)y]$$

où f_X est la d.d.p de la loi uniforme sur $[a,b]$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad Y \sim U_{[0,1]}.$$

Ex.II. X v.a. , sa loi a pour d.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1) i) c ? : $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow c \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 cx^2\,dx + \int_2^3 cx\,dx = 1$

$$\Leftrightarrow c\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + c\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{29}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{29}x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{6}{29}x & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) $P(X<2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_1^2 \frac{6}{29}x^2\,dx = \frac{14}{29}$

iii) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} 0\,dx + \int_1^{3/2} \frac{6}{29}x^2\,dx$

$$= \frac{6}{29}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{3/2} = \frac{19}{116}$$