SOMMAIRE

# CHAPITRE II
# Conducteurs en équilibre électrostatique

# II- Conducteurs en équilibre électrostatique

## II.1- DEFINITION

Un ***conducteur*** est un corps (solide, liquide ou gazeux) qui contient des électrons libres de se déplacer entre les atomes qui le constituent lorsqu'à l'intérieur de celui-ci règne un champ électrostatique $\vec{E}$ .

On appelle ***conducteur en équilibre électrostatique***, un conducteur dont les électrons sont immobiles.

## II.2- CARACTERISTIQUES DU CONDUCTEUR EN EQUILIBRE

1/ ***Le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul.***

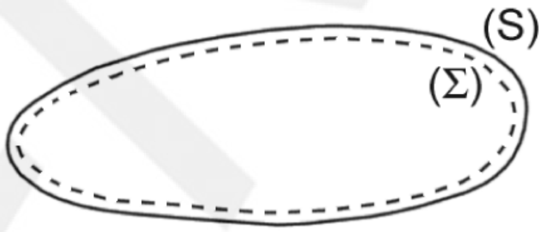
Aucune charge ne se déplace à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. La force $\vec{F}_{int.}$ qui s'y applique étant nulle, alors le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul également :

$$\vec{F}_{int} = q\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$$

***2/ Les charges, si elles existent, d'un conducteur en équilibre ne sont réparties qu'à sa surface extérieure. A l'intérieur de celui-ci, il n'y a pas de charges non compensées :*** $\mathbf{Q_{int} = 0}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit un conducteur en équilibre électrostatique <u>chargé</u>, de volume (*V*) délimité par une surface (S). Considérons une surface fermée $(\Sigma)$ quelconque à l'intérieur de ce conducteur.




Appliquons le théorème de Gauss pour calculer le flux à travers $(\Sigma)$ :

$$\phi_{(\Sigma)} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum q_{int}$$

avec $\sum q_{int}$ la somme algébrique des charges présentent à l'intérieur de la surface $(\Sigma)$.

D'un autre côté, le flux à travers $(\Sigma)$ est, par définition :

$$\phi_{(\Sigma)} = \oint_{(\Sigma)} \vec{E}_{int}.d\vec{\Sigma}$$

Comme $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ à l'intérieur du conducteur en équilibre, on a : $\phi_{(\Sigma)} = 0$. On en déduit que :

$$\sum q_{int} = 0$$

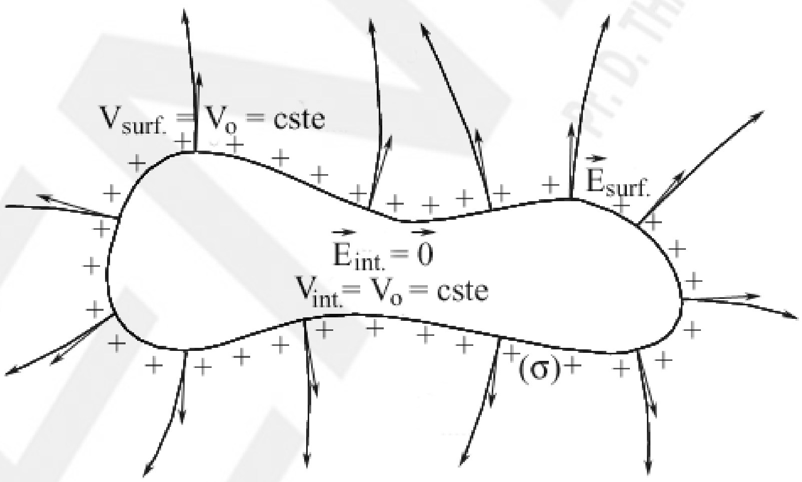
Cela signifie que dans tout élément de volume intérieur, il y a autant de charges positives que de charges négatives : on dit que toutes les charges sont <u>compensées</u>.

La surface $(\Sigma)$ étant quelconque, on peut la prendre infiniment proche de (S). Le résultat final est que les charges <u>non compensées</u> du conducteur (ramenées par un moyen quelconque), puisqu'elles ne peuvent être à l'intérieur du conducteur, sont nécessairement localisées à sa surface (par répulsion). Le champ à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, même chargé, est nul.

***3/ Le potentiel électrostatique est constant dans tout le volume du conducteur en équilibre.***

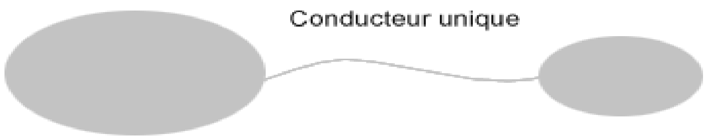
De la relation $dV = -\vec{E}_{int}.d\vec{\ell}$, avec $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, on obtient $dV = 0$ et l'on déduit que le potentiel électrostatique en tout point d'un conducteur en équilibre est une constante : $V_{int.} = V_{(S)} = C^{ste}$. *Le conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel en entier.*

Le potentiel étant constant, si le conducteur porte des charges (en surface), alors le champ électrostatique $\vec{E}_{surf.}$ est perpendiculaire à la surface.




<u>*Remarque*</u> : la surface étant équipotentielle, les lignes de champ ne peuvent retourner sur la surface du conducteur car ces lignes vont des grands potentiels vers les petits potentiels.

***4/ Deux conducteurs en équilibre reliés par un fil conducteur long et fin constituent un conducteur en équilibre unique.***




***5/ Un conducteur en équilibre ayant une cavité sans charge possède les mêmes propriétés qu'un conducteur plein.***

*$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ même dans la cavité.

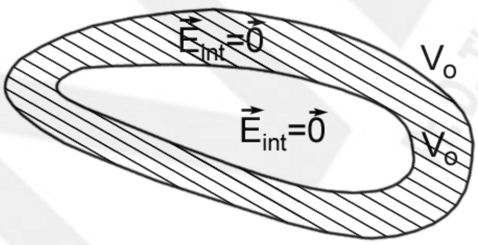
*Il n'y a pas de charges sur la surface interne de la cavité. Les charges sont sur la surface externe du conducteur.

*Toute la cavité est au même potentiel que le conducteur.

Donc, deux conducteurs ayant la même forme mais dont l'un est plein et l'autre creux vide de charges, se comportent de façon identique. Les charges en excès se mettent sur la surface externe.

<u>Application</u> :

Cage de Faraday : un conducteur creux maintenu à un potentiel constant constitue un écran électrostatique parfait. L'électricité ne peut pénétrer à l'intérieur de la cavité.




## II.3- CHAMP ELECTROSTATIQUE AU VOISINAGE EXTERIEUR IMMEDIAT D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE- THEOREME DE COULOMB

Le champ à l'intérieur du conducteur en équilibre est nul : $\vec{E}_{int.} = \vec{0}$.

Les charges non compensées du conducteur sont réparties en surface et créent un champ électrostatique $\vec{E}$ à l'extérieur. Soit un conducteur en équilibre de surface (S) et de densité surfacique de charges $\sigma$.

Intéressons-nous au champ $\vec{E}$ en un point M très proche de la surface extérieure du conducteur. Soit (dS') l'élément de surface pris autour de M.

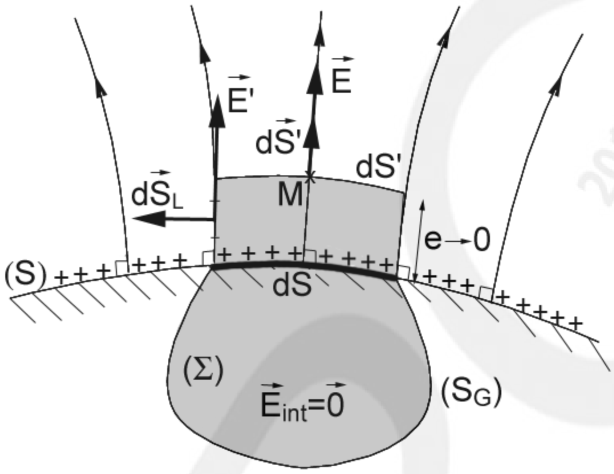
La surface (S) étant une surface équipotentielle, on en déduit que les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface (S) : donc $\vec{E} \perp (S)$ au voisinage de la surface.

Considérons la surface de Gauss fermée telle que représentée sur la figure : $(S_G) = (\Sigma) + (S_L) + (dS')$ :

$(\Sigma)$ est une surface quelconque prise à l'intérieur du conducteur s'appuyant sur (dS),

(dS') est considérée comme parallèle à (dS) et distante d'une quantité très petite e,

$(S_L)$ est la surface latérale du tube de champ construit sur les sections (dS) et (dS').




Calculons le flux à travers cette surface de Gauss :

$$d\phi_{(S_G)} = \vec{E}_{int}.d\vec{\Sigma} + \vec{E}'.d\vec{S}_L + \vec{E}.d\vec{S}' = \frac{dq_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_o}$$

- $\vec{E}_{int}.d\vec{\Sigma} = 0$ car $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- $\vec{E}'.d\vec{S}_L = 0$ car $\vec{E}' \perp d\vec{S}_L$.
- $\vec{E}.d\vec{S}' = EdS'$ car $\vec{E} // d\vec{S}'$ (et de même sens)

Finalement : $d\phi_{(S_G)} = EdS' = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_o} \Rightarrow E(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$ (car dS'=dS)

En conclusion, le champ au voisinage externe immédiat du conducteur chargé est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}$$

$\vec{n}$ étant un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur, dirigé vers l'extérieur.

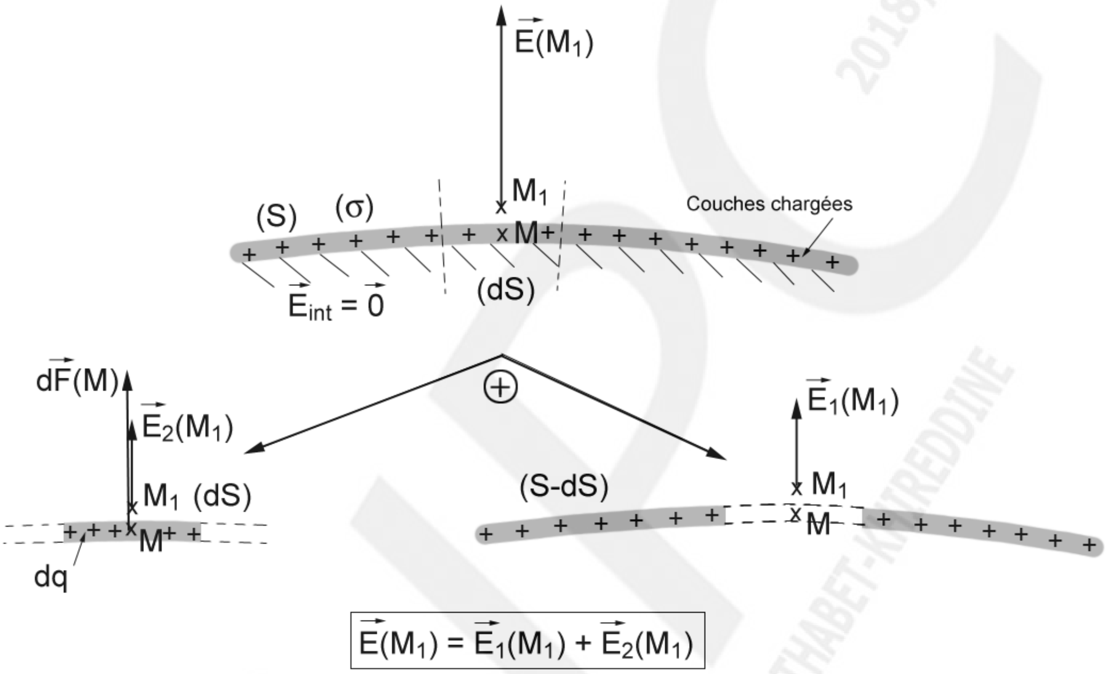
***<u>Théorème de Coulomb</u> :***

*Au voisinage immédiat d'un conducteur portant localement une densité de charge surfacique σ, le champ électrostatique est porté par la normale à la surface et vaut :*

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}$$

## II.4- PRESSION ELECTROSTATIQUE

Soit un conducteur en équilibre de surface (S) et un élément dS pris autour d'un point M de la surface chargée où la densité surfacique est $\sigma$. Cet élément, qui porte une charge élémentaire $dq = \sigma dS$, est soumis à une force $d\vec{F}$ de la part de toutes les charges autres que celles de dS. Pour calculer cette force, il faut déterminer le champ électrostatique appliqué à dq, donc le champ créé au point M par les charges distribuées sur (S-dS). Soit $\vec{E}_1(M)$ ce champ.




Nous connaissons le champ $\vec{E}$ donné par le théorème de Coulomb au voisinage proche de la surface. Ce champ est créé par la distribution de charges de toute la surface (S) fermée du conducteur. On a :

$$\vec{E}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}.$$

Au même point $M_1$, on peut connaître le champ créé par la charge dq portée par dS. En effet, pour un point infiniment proche de dS, il est possible d'assimiler cette configuration à un plan infini chargé (voir chapitre I). Donc :

$$\vec{E}_2(M_1) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}.$$

Les charges de (S-dS) créent au point $M_1$ un champ $\vec{E}_1(M_1)$.

En appliquant le principe de superposition, on a :

$$\vec{E}(M_1) = \vec{E}_1(M_1) + \vec{E}_2(M_1).$$

On en déduit $\vec{E}_1(M_1) = \vec{E}(M_1) - \vec{E}_2(M_1) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}$ .

Ce champ $\vec{E}_1(M_1)$ est pratiquement égale à $\vec{E}_1(M)$ , M et $M_1$ étant infiniment proches :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\sigma_o}\vec{n}$$

En conclusion, la charge dq contenue dans l'élément dS est soumise à une force :

$$d\vec{F}(M) = dq\vec{E}_1(M) = \sigma dS\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}dS\vec{n}$$

On définit ainsi la pression électrostatique p exercée sur l'élément chargé dS : c'est une force par unité de surface :

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}$$

Cette quantité est toujours positive.

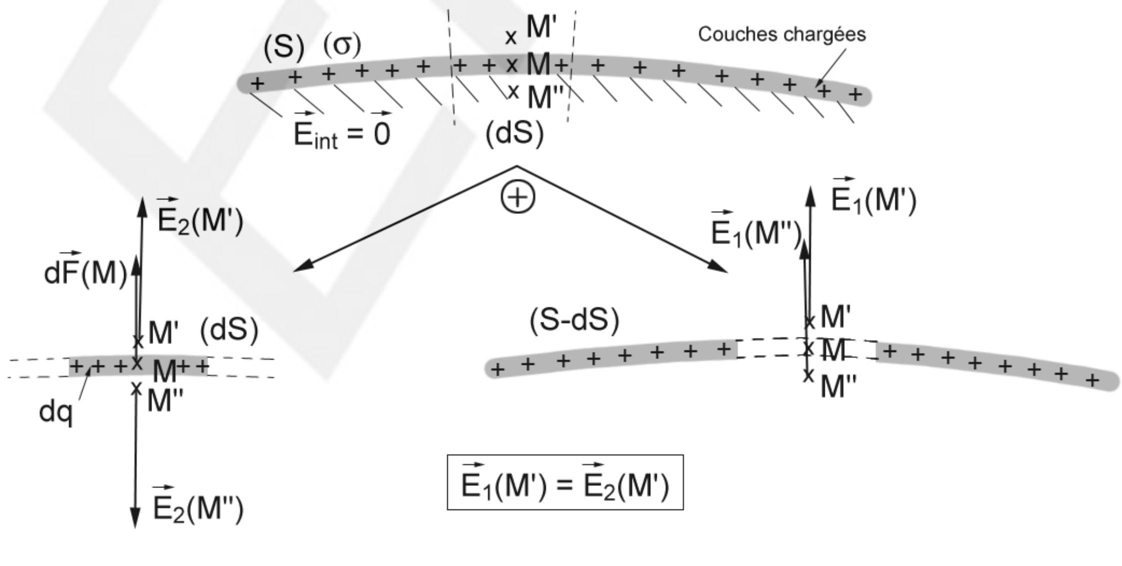
Vectoriellement, on a : $$\vec{p}(M) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}\vec{n}$$

La pression électrostatique $\vec{p}(M)$ en un point M de la surface est donc dirigée vers l'extérieur quel que soit le signe de la charge.

<u>*Unité de pression*</u> : $N/m^2 \equiv Pa$ (Pascal) - $1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$

<u>*Remarque*</u> :

Autre méthode pour le calcul du champ $\vec{E}_1$ créé par les charges autres que celles de (dS), situées sur (S-dS) du conducteur en équilibre électrostatique en un point M de (dS) :



* $M'$ et $M''$ sont deux points infiniment proches de (dS) : $M'$ est à l'extérieur du conducteur, $M''$ est à l'intérieur.

*Au point $M'$, existent les champs $\vec{E}_1(M')$ et $\vec{E}_2(M')$ qui sont respectivement les champs créés par (S-dS) et par (dS).

*Au point $M''$, existent les champs $\vec{E}_1(M'')$ et $\vec{E}_2(M'')$ qui sont respectivement les champs créés par (S-dS) et par (dS).

On peut énoncer les trois propriétés suivantes :

1/ $\vec{E}_1(M') = \vec{E}_1(M'')$, les points $M'$ et $M''$ étant infiniment proches.

2/ $\vec{E}_1(M'') + \vec{E}_2(M'') = \vec{E}_{int.} = \vec{0}$ : le champ en tout point à l'intérieur du conducteur en équilibre est nul, donc : $\vec{E}_1(M'') = -\vec{E}_2(M'')$

3/ $\vec{E}_2(M') = -\vec{E}_2(M'')$ : ces deux vecteurs sont symétriques par rapport à (dS) . $M'$ et $M''$ étant infiniment proches de l'élément (dS), on peut considérer que (dS) est un plan infini relativement à ces deux points et appliquer le résultat connu pour le plan infini : $\vec{E}_2(M') = -\vec{E}_2(M'') = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}$ .

De ces trois relations, on déduit :

$$\vec{E}_1(M') = \vec{E}_1(M'') = -\vec{E}_2(M'') = \vec{E}_2(M') \Rightarrow \vec{E}_1(M') = \vec{E}_2(M') = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}$$

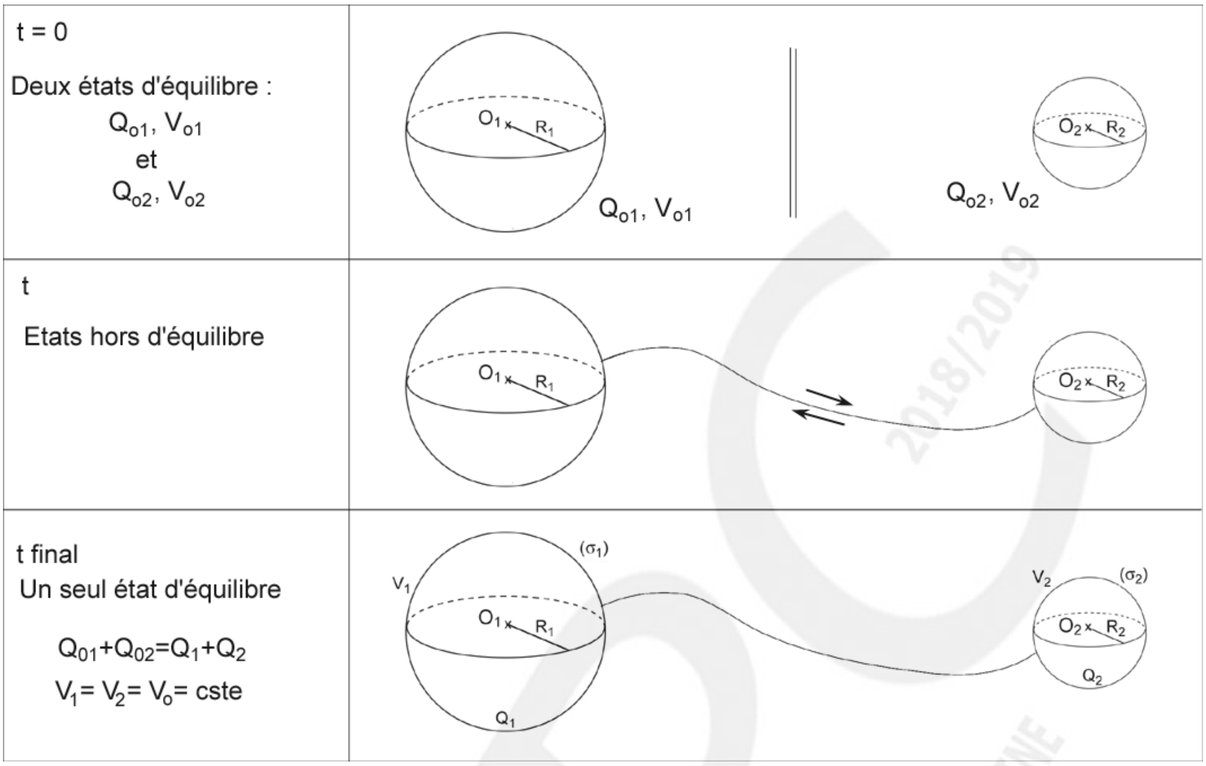
Finalement : $\vec{E}_1(M') = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}$ et, comme le point M, situé dans la couche (dS), est aussi infiniment proche de $M'$ (tout comme $M''$), alors le champ appliqué à l'élément de charge dq autour de M est :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{n}$$

## II.5- POUVOIR DES POINTES

Considérons deux sphères conductrices en équilibre de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ (au départ, elles sont isolées l'une de l'autre). Elles sont ensuite reliées par un fil conducteur très long (pour éviter le phénomène d'influence de proximité) et très fin (pour minimiser sa capacité). Dans cette situation, la première a une densité surfacique de charges $\sigma_1$, la seconde, $\sigma_2$ et les deux sphères reliées par le fil vont constituer un nouvel état d'équilibre d'un conducteur unique de potentiel $V_o$.

Calculons séparément les potentiels de l'une et l'autre sphère : Comme tout le volume est au même potentiel, autant les calculer aux centres des sphères :




$$V_1 = V(O_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_{(S_1)} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} \quad \text{et} \quad V_2 = V(O_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_{(S_2)} \frac{\sigma_2 dS}{R_2} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2}.$$

L’ensemble constituant un seul conducteur avec un nouvel état d’équilibre, on peut donc écrire que :

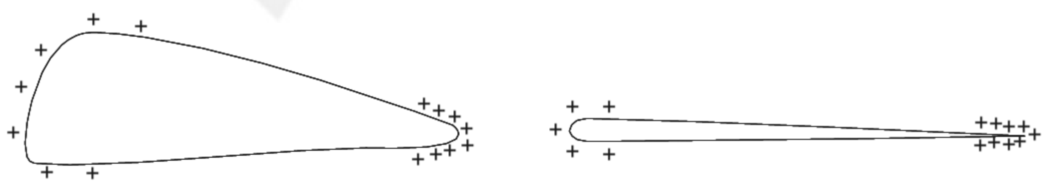
$$V_1 = V_2 = V_o,$$

Et on en déduit : $\dfrac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \dfrac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$,

soit, $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$ : ce qui implique que si $R_2 << R_1$, alors : $\sigma_2 >> \sigma_1$.

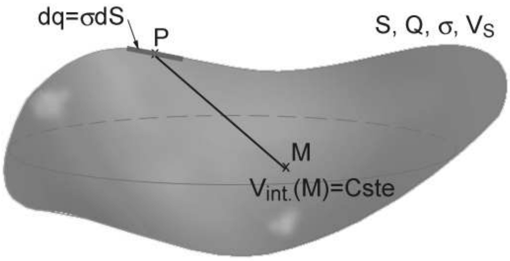
Ainsi, pour ce conducteur en équilibre, la répartition des charges est plus intense au niveau de la petite sphère, donc à proximité de la pointe. Il en est de même pour le champ électrostatique $\vec{E}$, il sera plus intense à proximité de la pointe.

Des objets ayant les formes suivantes ont des densités de charges élevées au niveau des rayons de courbures les plus faibles.



A la limite, la densité au niveau d'une pointe d'aiguille peut être très élevée. C'est ce qu'on appelle le ***pouvoir des pointes*** dont l'application la plus connue est le paratonnerre (longue tige métallique) qui, reliée à la Terre, protège les édifices de la foudre. La foudre passera préférentiellement par la pointe du paratonnerre et l'électricité de haute intensité s'écoulera au sol, protégeant ainsi l'édifice.

## II.6- CAPACITE D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ISOLE




*Etat d'équilibre 1 :

Considérons un conducteur en équilibre isolé dans l'espace et apportons-lui une charge Q. Cette charge se répartie sur sa surface (S) selon une densité surfacique $\sigma$ telle que :

$$Q = \iint_{(S)} \sigma(P)dS, \text{ P étant un point de (S).}$$

Par ailleurs, on sait que :

* $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

* Le potentiel : $V_{int}(M) = V_{(S)} = V = C^{ste}$.

Le potentiel $V$ du conducteur, en un point M quelconque à l'intérieur du conducteur, est :

$$V_{int.}(M) = V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_{(S)} \frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

où $\sigma(P)$ est la densité de charge locale au point P de la surface du conducteur.

*Etat d'équilibre 2 :

Si l'on multiplie $Q$ et $V$ par un facteur $\lambda$, le système est dans un nouvel état d'équilibre défini par $\sigma'$, Q' et V', avec :

$\sigma'(P) = \lambda\sigma(P)$,

$Q' = \iint_{(S)} \sigma'(P)dS = \lambda Q$

et $V'(M) = V'_{(S)} = k\iint_{(S)} \frac{\sigma'(P)dS}{PM} = \lambda V(M) = \lambda V_{(S)}$

. Quel que soit l'état d'équilibre pour un conducteur donné, le rapport entre Q et V reste constant et ne dépend que de (S) (puisqu'on intègre sur (S) pour trouver les expressions de $Q$ et $V$ ou Q' et V'), c'est-à-dire dépend de la forme géométrique de sa surface :

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = C^{ste}$$

D'une manière générale, pour deux états d'équilibre donnés définis par les triplets $(\sigma_1, Q_1, V_1)$ et $(\sigma_2, Q_2, V_2)$, on peut définir un nouvel état d'équilibre caractérisé par $(\sigma_3, Q_3, V_3)$ qui est la combinaison linéaire des deux autres :

$$\begin{cases} \sigma_3 = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 \\ Q_3 = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 \\ V_3 = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \end{cases} \text{ avec } \frac{Q_3}{V_3} = C^{ste}$$

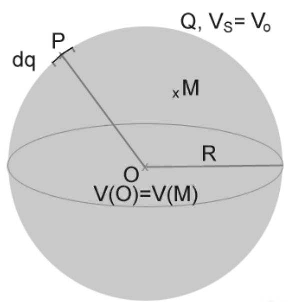
C'est ce qu'on appelle « ***le principe de superposition des états d'équilibre*** » : la superposition de plusieurs états d'équilibre donne un nouvel état d'équilibre tel que la charge du conducteur est proportionnel à son potentiel V. Ceci est également valable lorsque l'on a un système de plusieurs conducteurs en équilibre.

Ce coefficient de proportionnalité porte le nom de « capacité », noté C et l'on a :

$$\mathbf{Q = C \times V}$$

<u>Unité</u> : La capacité a pour unité le « Farad » : 1F = 1C/V.

<u>Exemple</u> : Capacité d'une sphère de rayon R portant une charge totale en surface égale à Q.




Le calcul du potentiel qui est constant dans tout le volume de la sphère peut se faire au point O (en un point M quelconque à l'intérieur, le calcul est plus difficile car r varie, et ce, pour un résultat identique).

$$V_o = V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_{(S)} \frac{\sigma(P)dS}{PO} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{(Q)} \frac{dq}{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

On en déduit la capacité de la sphère : $C = \dfrac{Q}{V_o} = 4\pi\varepsilon_o R$ (unité de $\varepsilon_o$ : F/m)

*<u>Remarque</u> :*

1/ Ordre de grandeur de C :

1F représente une gigantesque capacité, en effet : pour C=1F, le conducteur sphérique aura un rayon $R = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \approx 9.10^9\,\text{m}$, donc un conducteur de dimension énorme (354 fois le diamètre de la Terre !).

C'est pourquoi, on utilise des sous-multiples du Farad pour mesurer les capacités qui sont de l'ordre du pF ($10^{-12}$F), nF ($10^{-9}$F), µF ($10^{-6}$F) et mF ($10^{-3}$F) : Si R = 1 m, C = 0,11 nF.

2/ La capacité d'un conducteur est une grandeur positive qui dépend de sa forme géométrique et de ses dimensions ainsi que de la permittivité électrique du vide $\varepsilon_o$.

## II.7- ENERGIE POTENTIELLE ELECTROSTATIQUE

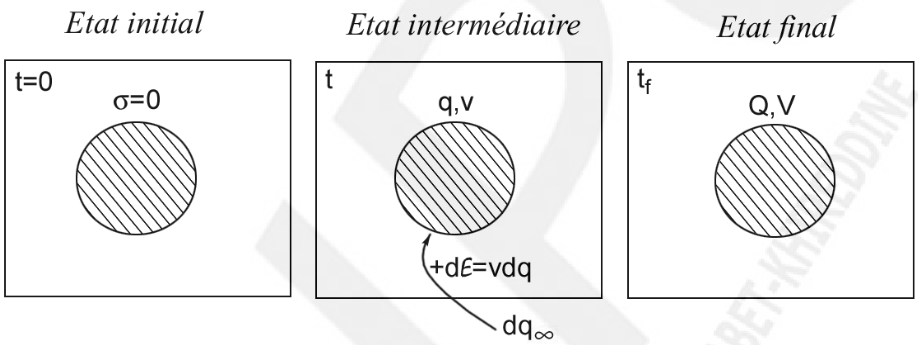
### II.7.1- ENERGIE POTENTIELLE D'UN SEUL CONDUCTEUR EN EQUILIBRE CHARGE

Considérons un conducteur en équilibre portant une charge surfacique totale Q et possédant un potentiel V, tel que $Q = CV$, C étant sa capacité.

Pour calculer l'énergie électrostatique de ce conducteur, procédons comme suit : supposons qu'à l'instant initial, sa charge et son potentiel sont nuls. Ramenons une charge dq de l'infini jusqu'à la surface du conducteur, le potentiel du conducteur est alors dv.

On poursuit l'opération par apports successifs jusqu'à ce que la charge devienne q et le potentiel v pour un état intermédiaire tel que q=Cv. Chaque opération suivante pour ajouter un dq nécessite un travail élémentaire dW qui apparaît sous forme d'énergie potentielle dans le conducteur qui s'écrit :

$$d\mathcal{E}_p = vdq$$




On termine cette opération jusqu'à ce que le conducteur porte finalement la charge totale Q et se trouve au potentiel V. On a donc l'énergie potentielle totale égale à :

$$\mathcal{E}_p = \int_0^Q vdq = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \text{car :} \quad C = \frac{q}{v} = \frac{Q}{V}$$

Et comme $Q = CV$, on a aussi : $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$

### II.7.2- ENERGIE POTENTIELLE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS EN EQUILIBRE CHARGES

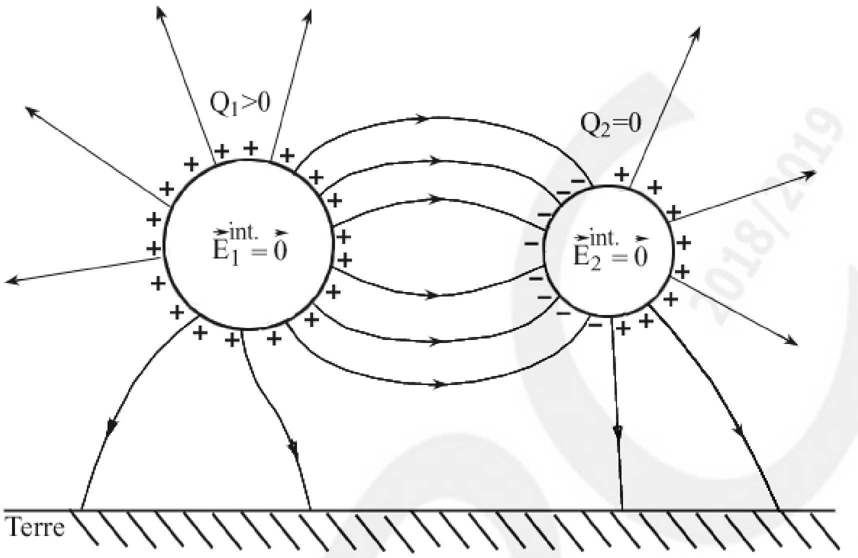
Considérons n conducteurs en équilibre ayant des charges et des potentiels respectifs $Q_1,...,Q_n$ et $V_1,\dots,V_n$. L'énergie totale de ce système de conducteurs est :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + ....Q_nV_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i$$

## II.8- INFLUENCE ENTRE CONDUCTEURS

### II.8.1- THEOREME DES ELEMENTS CORRESPONDANTS

- Soit un conducteur 1 de forme sphérique (pour simplifier) en équilibre, portant une charge surfacique $Q_1 > 0$. A l'intérieur, le champ est nul, mais à l'extérieur, il existe un champ dont les lignes sont perpendiculaires à la surface de la sphère.




- Approchons un conducteur 2 non chargé $Q_2 = 0$ : à l'intérieur, les charges positives fixes (ions) et les électrons libres de se mouvoir sont distribuées de façon uniforme, c'est-à-dire que le conducteur est électriquement neutre. La figure ci-dessus représente l'état final d'influence.

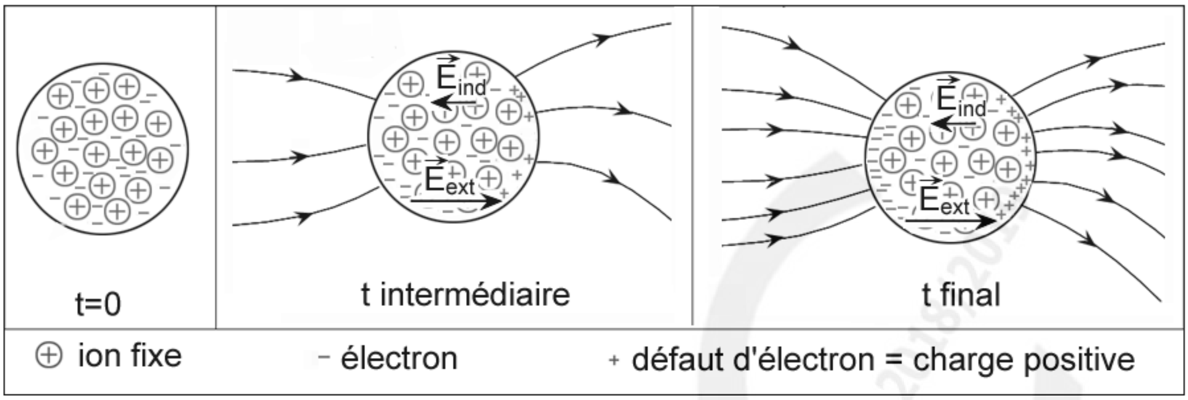
- On observe une modification des lignes de champ : les zones des conducteurs qui se font face ont des lignes de champ qui partent de la surface chargée positivement du conducteur 1 et viennent sur la surface chargée négativement du conducteur 2. Ailleurs, les lignes de champ s'éloignent vers l'infini où vers le sol. Les deux conducteurs sont en équilibre.

- D'autre part, le conducteur chargé 1 va influencer le conducteur neutre 2 en provoquant le déplacement de ses charges : les charges négatives vont migrer du côté du conducteur 1 et les charges positives du côté opposé, provoquant un champ intérieur induit. Ce mouvement cessera lorsque le champ extérieur compensera le champ intérieur, c'est-à-dire lorsque le champ total à l'intérieur du conducteur neutre sera nul :

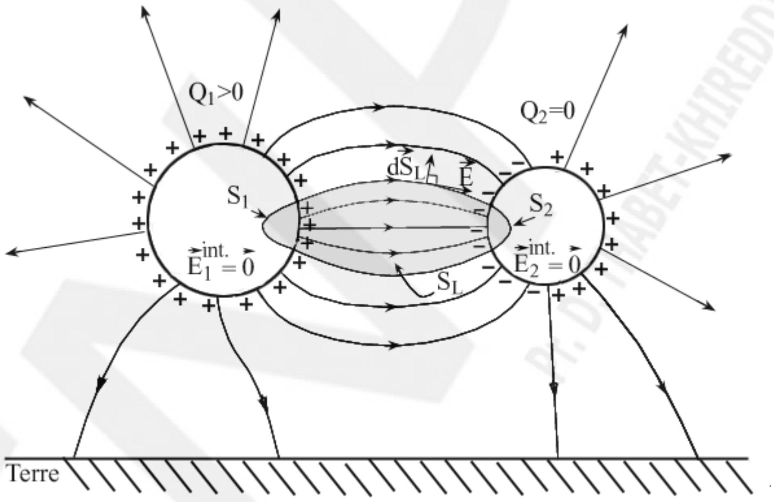
$$\vec{E}_2^{\,int.} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = \vec{0}$$

Remarquons bien que ces charges positives résultant du champ induit ne sont en fait qu'un **défaut d'électrons** (ne pas confondre ces charges avec les ions positifs fixes du métal constituant le conducteur).

Conducteur 2




- Considérons maintenant un tube de champ entre les deux conducteurs et une surface de Gauss $S_G$ constituée de la surface latérale $S_L$, ce tube est fermé par les surfaces $S_1$ et $S_2$ prises respectivement à l'intérieur des conducteurs 1 et 2 et appliquons le théorème de Gauss pour calculer le flux à travers cette surface fermée.




Comme à l'intérieur des conducteurs $\vec{E} = \vec{0}$ et qu'à l'extérieur $d\vec{S}_L$ est perpendiculaire à $\vec{E}$ (tangent aux lignes de champ du tube considéré), alors le flux total à travers la surface de Gauss considéré est nul :

$$\phi_{S_G} = \iint_{(S_L)} \vec{E}.d\vec{S}_L + \iint_{(S_1)} \vec{E}_1^{int.}.d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}_2^{int.}.d\vec{S}_2 = 0 = \frac{\sum q_{int.}^{S_G}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \sum q_{int.}^{S_G} = 0$$

Les seules charges qui sont présentent à l'intérieur de la surface de Gauss sont celles des deux éléments correspondants des deux conducteurs 1 et 2, soient $q_1$ et $q_2$. Donc :

$$\sum q_{int.}^{S_G} = 0 \Rightarrow q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{q_2 = -q_1}$$

En effet, les surfaces des conducteurs à l'intérieur du tube de champ sont appelées « éléments correspondants », d'où le théorème : « ***Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées*** ».

### II.8.2- CONDUCTEUR EN INFLUENCE PARTIELLE RELIE A LA TERRE

Dans le paragraphe précédant, on a vu, à travers la topographie des lignes de champ, que les deux conducteurs s'influencent mutuellement : des lignes de champ partent du conducteur 1 et arrivent sur le conducteur 2 pour les zones qui se font face. Ailleurs, les lignes de champ ne sont pas modifiées : elles vont soit vers l'infini, soit vers la Terre. On dit que les conducteurs sont en « influence partielle » et que le conducteur 2 a été « électrisé par influence » (il n'y a pas eu création de charges mais simplement déplacement de ses propres charges). Les électrons du conducteur 2 se déplacent, laissant un déficit d'électrons de l'autre côté, ce déficit correspondant à des charges positives.

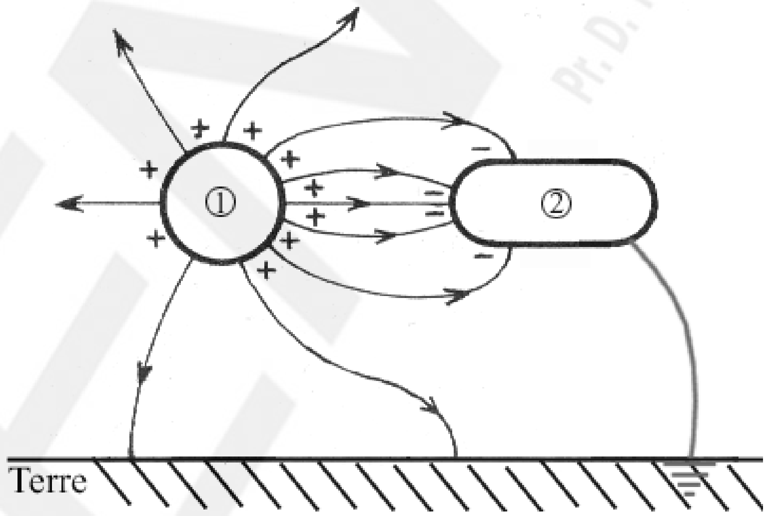
*Remarques :*

Si l'on relie le conducteur 2 au sol par un fil, que se passe-t-il ?

1/ Le conducteur 2 et la Terre sont au même potentiel (ils constituent un conducteur unique) : donc aucune ligne de champ ne peut aller de ce conducteur au sol.

2/ Le potentiel du conducteur 1 est plus élevé que celui du conducteur 2 : donc aucune ligne de champ ne peut aller sur le conducteur 1.

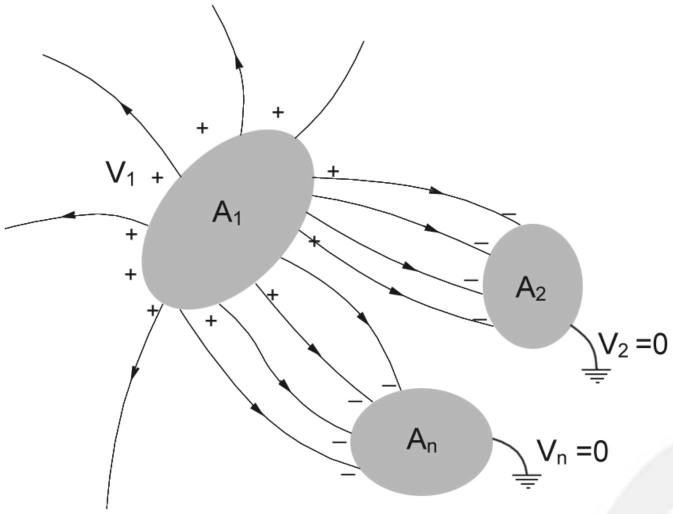
3/ En conséquence, aucune ligne de champ ne peut partir du conducteur 2, c'est-à-dire que celui-ci ne porte plus de charges positives. On dit, après avoir relié ce conducteur à la Terre, que les charges positives qui s'y trouvées, « se sont écoulées au sol » (plus exactement, les électrons en provenance de la Terre neutralisent les charges positives du conducteur 2).




### II.8.3- COEFFICIENTS D'INFLUENCE ELECTROSTATIQUES

Soit n conducteurs de formes et de positions invariables, notés $A_1,\ldots,A_n$, de charges $Q_1,\ldots,Q_n$ et de potentiels $V_1,\ldots,V_n$ en équilibre électrostatique. Ils sont en influence mutuelle les uns avec les autres. Un conducteur quelconque $A_i$ aura pour charge :

$$Q_i = C_{i1}V_1 + C_{i2}V_2 + \ldots + C_{ii}V_i + \ldots + C_{in}V_n = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j$$




Démonstration : considérons les n états d'équilibre suivants puis appliquons le principe de superposition des états d'équilibre.

*Le conducteur $A_1$ est porté au potentiel $V_1$, les autres ont un potentiel nul (mise à la terre). Par influence, les conducteurs $A_1,\ldots,A_n$ auront des charges respectives $q_{11},\ldots,q_{n1}$.

Or, d'après le théorème de superposition des états d'équilibre, il y a proportionnalité entre les charges $q_{i1}$ et le potentiel $V_1$ :

$$q_{11} = C_{11}V_1 \;;\; q_{21} = C_{21}V_1 \;; \ldots.\; q_{n1} = C_{n1}V_1 .$$

Par exemple, $q_{21}$ est la charge apparaissant sur $A_2$ lorsque seul le conducteur $A_1$ est au potentiel $V_1$, les autres conducteurs étant au potentiel nul.

*De même, si c'est le conducteur $A_i$ qui est seul a avoir un potentiel non nul $V_i$, on aura :

$$q_{1i} = C_{1i}V_i \;;\; q_{2i} = C_{2i}V_i \;; \ldots.\; q_{ni} = C_{ni}V_i .$$

*Nous avons ainsi n états d'équilibre pour ce système de conducteurs :

| Conducteurs | | $A_1$ | $A_2$ | … | $A_i$ | … | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1$^{er}$ état | Potentiels | $V_1$ | 0 | … | 0 | … | 0 |
| | Charges | $q_{11}=C_{11}V_1$ | $q_{21}=C_{21}V_1$ | … | $q_{i1}=C_{i1}V_1$ | … | $q_{n1}=C_{n1}V_1$ |
| 2$^{ème}$ état | Potentiels | 0 | $V_2$ | … | 0 | … | 0 |
| | Charges | $q_{12}=C_{12}V_2$ | $q_{22}=C_{22}V_2$ | … | $q_{i2}=C_{i2}V_2$ | … | $q_{n2}=C_{n2}V_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| i$^{ème}$ état | Potentiels | 0 | 0 | … | $V_i$ | … | 0 |
| | Charges | $q_{1i}=C_{1i}V_i$ | $q_{2i}=C_{2i}V_i$ | … | $q_{ii}=C_{ii}V_i$ | … | $q_{ni}=C_{ni}V_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| n$^{ème}$ état | Potentiels | 0 | 0 | … | 0 | … | $V_n$ |
| | Charges | $q_{1n}=C_{1n}V_n$ | $q_{2n}=C_{2n}V_n$ | … | $q_{ii}=C_{ii}V_i$ | … | $q_{nn}=C_{nn}V_n$ |
| Superposition | Potentiels | $V_1$ | $V_2$ | … | $V_i$ | … | $V_n$ |
| | Charges | $Q_1$ | $Q_2$ | … | $Q_i$ | … | $Q_n$ |

Après superposition, nous obtenons l'état le plus général:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + ... + C_{1i}V_i + ... + C_{1n}V_n \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + ... + C_{2i}V_i + ... + C_{2n}V_n \\ ............................................................ \\ Q_i = C_{i1}V_1 + C_{i2}V_2 + ... + C_{ii}V_i + ... + C_{in}V_n \\ ............................................................ \\ Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + ... + C_{ni}V_i + ... + C_{nn}V_n \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ ... \\ Q_i \\ ... \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1i} & ... & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2i} & ... & C_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{i1} & C_{i2} & ... & C_{ii} & ... & C_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{n1} & C_{n2} & ... & C_{ni} & ... & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ ... \\ V_i \\ ... \\ V_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients $C_{ij}$ $(i \neq j)$ sont appelés ***coefficients d'influence*** et les coefficients $C_{11}$, $C_{22}$, …, $C_{nn}$ sont appelés ***capacités des conducteurs*** $A_1, A_2, ..., A_n$ ***en présence des autres conducteurs***. Ces coefficients ne dépendent pas des potentiels mais des positions et des formes des conducteurs.

*Remarques* :

D'une manière générale, ces coefficients ont les propriétés suivantes :

*La capacité $C_{ii}$ (ou coefficient de capacité) du conducteur i en présence des autres conducteurs est différente de sa capacité $C_i$ lorsqu'il est seul.

*Les $C_{ii}$ sont toujours positifs.

*Les $C_{ij}$ sont toujours négatifs et on a $C_{ij} = C_{ji}$ (matrice symétrique).

*$C_{ii} \geq -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} C_{ji}$ . On a égalité dans le cas de l'influence totale.

*Exemple* :

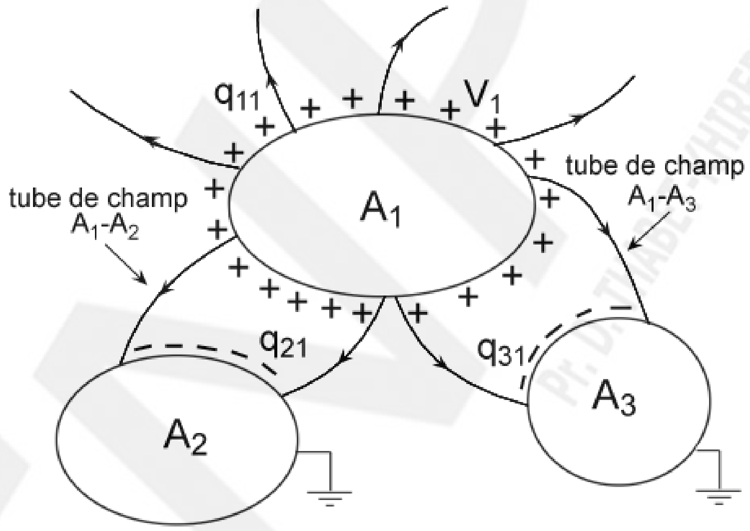
Pour être plus concret, prenons l'exemple de 3 conducteurs $A_1$, $A_2$ et $A_3$, de charges et potentiels respectifs $(Q_1,V_1)$, $(Q_2,V_2)$ et $(Q_3,V_3)$.

Ces trois conducteurs sont mis en influence. Leurs charges sont égales :

$$
\begin{cases}
Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 = \sum\limits_{j=1}^{3} C_{1j}V_j \\
Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 = \sum\limits_{j=1}^{3} C_{2j}V_j \\
Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3 = \sum\limits_{j=1}^{3} C_{3j}V_j
\end{cases}
$$

Démontrons ces relations :

On porte, tour à tour, les conducteurs à leur potentiel respectif, les deux autres étant mis à la Terre. Commençons par le conducteur $A_1$ : mettons-le au potentiel $V_1$ et les deux autres au potentiel nul : le conducteur $A_1$ porte alors une charge $q_{11} = C_{11}V_1$ et les conducteurs $A_2$ et $A_3$ portent respectivement les charges $q_{21} = C_{21}V_1$ et $q_{31} = C_{31}V_1$ par influence avec $A_1$. Et de même pour les conducteurs $A_2$ et $A_3$. Nous avons 3 états d'équilibre.




Reportons ces résultats dans un tableau :

| Conducteurs | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1er état d'équilibre | Potentiels | $V_1$ | 0 | 0 |
| | Charges | $q_{11}=C_{11}V_1$ | $q_{21}=C_{21}V_1$ | $q_{31}=C_{31}V_1$ |
| 2ème état d'équilibre | Potentiels | 0 | $V_2$ | 0 |
| | Charges | $q_{12}=C_{12}V_2$ | $q_{22}=C_{22}V_2$ | $q_{32}=C_{32}V_2$ |
| 3ème état d'équilibre | Potentiels | 0 | 0 | $V_n$ |
| | Charges | $q_{13}=C_{13}V_3$ | $q_{23}=C_{23}V_3$ | $q_{33}=C_{33}V_3$ |
| Superposition | Potentiels | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ |
| | Charges | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ |

- La superposition de ces trois états d'équilibre donne un état d'équilibre tel que :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 = \sum_{j=1}^{3} C_{1j}V_j \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 = \sum_{j=1}^{3} C_{2j}V_j \\ Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3 = \sum_{j=1}^{3} C_{3j}V_j \end{cases}$$

- Comme toutes les lignes de champ issues de $A_1$ n'arrivent pas nécessairement sur ces conducteurs, sauf le cas particulier de l'influence totale, alors, on doit avoir :

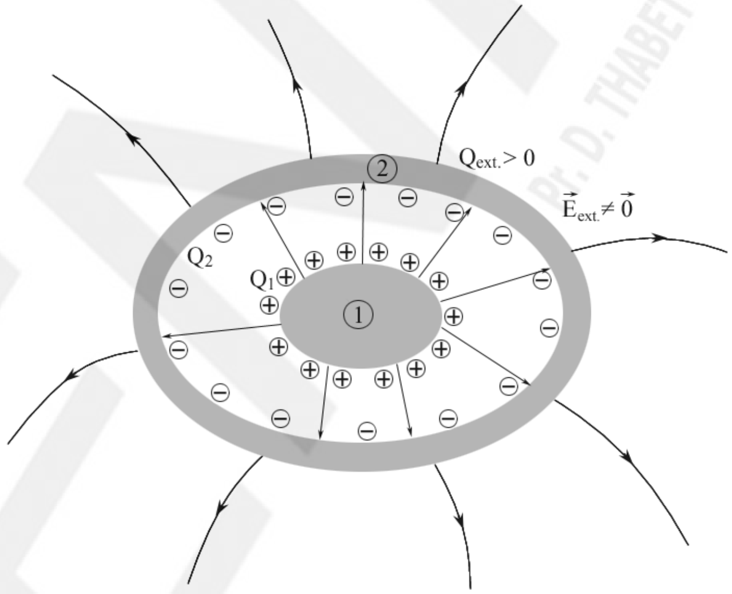
$$q_{11} \geq |q_{21}| + |q_{31}| \Rightarrow C_{11}V_1 \geq -(C_{21}V_1 + C_{31}V_1) \Rightarrow C_{11} \geq -(C_{21} + C_{31})$$

Où $q_{21}$ et $q_{31}$ sont les charges créées par influence respectivement sur $A_2$ et $A_3$.

Et, en généralisant à n conducteurs, on a bien :

$$C_{ii} \geq -\left(C_{1i} + C_{2i} + ... + C_{(i-1)i} + C_{(i+1)i} + ... + C_{ni}\right), \quad \text{soit :} \quad C_{ii} \geq -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} C_{ji}$$

### II.8.4- CONDUCTEURS EN INFLUENCE TOTALE




*L'influence entre deux conducteurs est dite « totale » si toutes les lignes de champ qui partent du conducteur 1 arrivent à la surface du conducteur 2 : cela peut être obtenu lorsque le conducteur 1 est à l'intérieur du conducteur 2 qui est creux.

*Le théorème des éléments correspondants permet alors de dire que la charge qui apparait sur **la surface interne** du conducteur 2 est égale est opposée à celle du conducteur 1 : $Q_2 = -Q_1$. La surface externe du conducteur 2 peut porter une charge quelconque $Q_{ext.}$.

### II.8.5- ECRAN ELECTROSTATIQUE : CAGE DE FARADAY

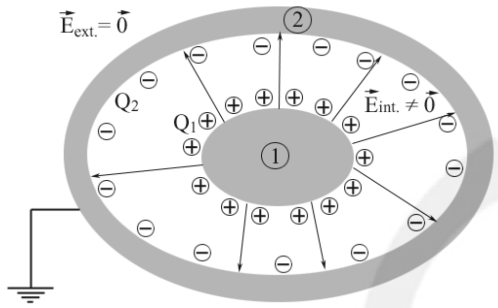



Figure 1.

1/ Reprenons le cas précédent de deux conducteurs en influence totale. Relions le conducteur 2 à la Terre (Figure 1). Les charges présentent à la surface externe de ce conducteur vont s'écouler au sol et le champ extérieur devient nul. Par contre, à l'intérieur, le conducteur 1 étant chargé, le champ à l'intérieur n'est pas nul. On conclut que l'espace extérieur n'est pas influencé par le champ régnant à l'intérieur de la cavité. Le conducteur 2 constitue un « écran électrique ».

2/ L'inverse est également vrai (Figure 2) : Supposons le conducteur 1 non chargé et le conducteur 2 à proximité d'un conducteur 3 chargé (ou d'une source quelconque de champ électrostatique). Cette fois-ci, à l'équilibre, le champ à l'intérieur est nul, mais à l'extérieur du conducteur 2, le champ ne l'est pas : il dépend de la distribution surfacique de charges due à l'influence entre les conducteurs 2 et 3. Là aussi, le champ extérieur n'a pas d'influence sur l'intérieur de la cavité. Le conducteur 2 constitue là aussi un « écran électrique » protégeant l'intérieur.

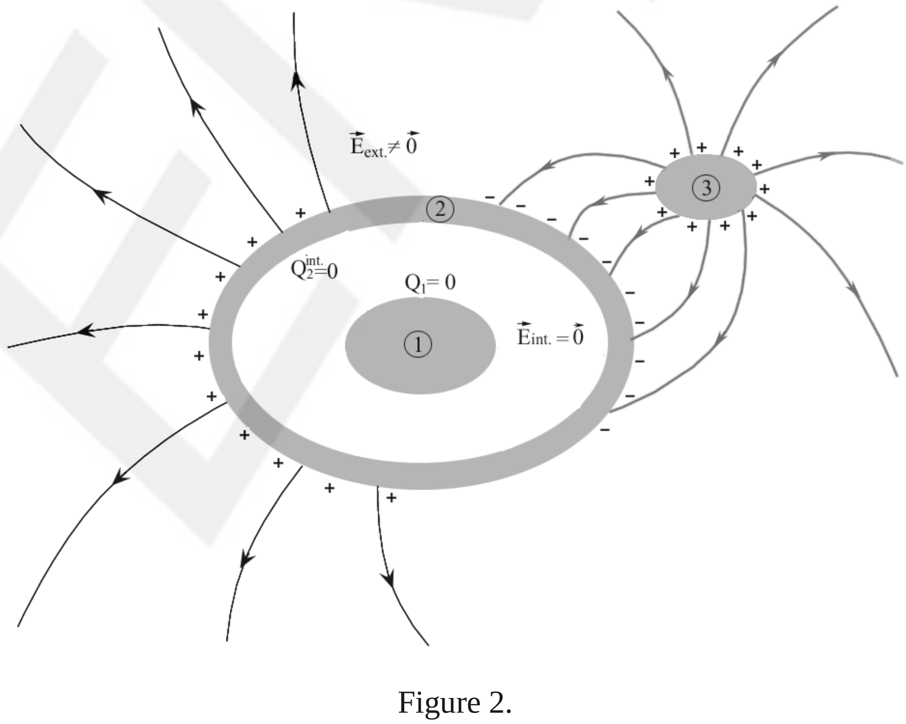



Figure 2.

Remarquons que ceci reste vrai même lorsque le conducteur 2 relié au sol (Figure 3).

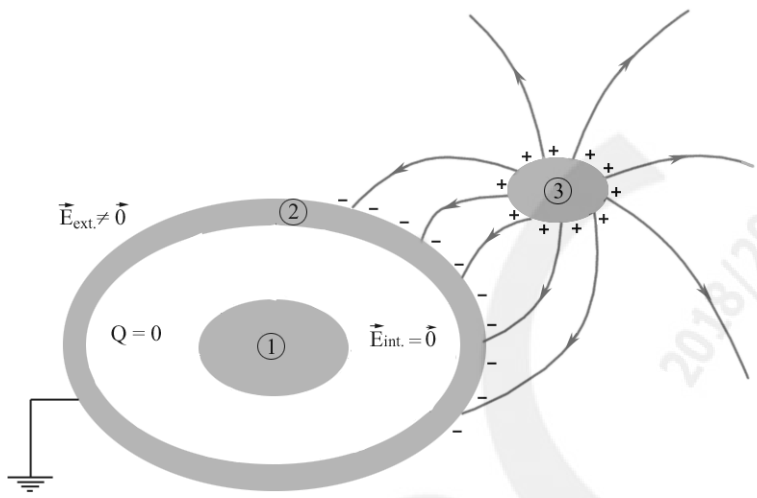



Figure 3.

En conclusion de cette partie, ***les espaces intérieur et extérieur au conducteur 2 sont parfaitement indépendants l'un de l'autre***.

**<u>Application</u> : Cage de Faraday.**

Une enceinte métallique fermée, reliée à la Terre, sépare l'espace en deux domaines indépendants et constitue un écran électrique : un champ électrostatique extérieur, même très puissant, n'interagit pas avec l'intérieur de l'enceinte. Inversement, un champ électrostatique interne ne modifie pas l'environnement de l'enceinte. Cette enceinte peut être constituée simplement d'un grillage. C'est ce qu'on appelle une ***cage de Faraday***.

<u>Exemples</u> :

- dans un laboratoire, lorsque l'on souhaite réaliser des mesures précises en électronique, en électricité ou sur les ondes électromagnétiques, on protège les appareillages au moyen d'une cage de Faraday pour éviter les perturbations créées par d'éventuels champs extérieurs.
- Pour se protéger de la foudre, le mieux est de rester dans sa voiture qui constitue une bonne cage de Faraday.
- Pour protéger un édifice contre la foudre, on utilise un paratonnerre généralement complété par un réseau de câbles relié à la Terre et entourant l'édifice.

## II.9- CONDENSATEURS ELECTRIQUES

### II.9.1- DEFINITION

On appelle condensateur un système de deux conducteurs en <u>influence totale</u>, c'est-à-dire que les lignes de champ qui partent de l'un arrivent toutes sur l'autre : ces deux conducteurs constituent les ***armatures*** du condensateur entre lesquelles existe soit le vide caractérisé par sa permittivité électrique $\varepsilon_o$ soit un isolant appelé « diélectrique » caractérisé par sa permittivité $\varepsilon = \varepsilon_o\, \varepsilon_r$, où $\varepsilon_r$ est la permittivité relative du matériau.

- l'armature 1 porte la charge superficielle $Q_1$ (charges libres),
- Surface interne de l'armature 2 : elle porte par influence totale la charge induite : $Q_2^{int.} = -Q_1$.
- Surface externe de l'armature 2 : sa charge $Q_2^{ext.}$ va dépendre de sa charge initiale et de son état électrique. On peut distinguer 3 cas :

  1/ Conducteur 2 isolé et initialement neutre (fig.1):

$$Q_2 = Q_2^{tot.} = Q_2^{int.} + Q_2^{ext.} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_2^{ext.} = -Q_2^{int.} = Q_1 .$$

  2/ Conducteur 2 isolé et portant une charge libre initiale $Q'$ (positive, par exemple) sur sa surface extérieure (fig.2) :

$$Q_2^{tot.} = Q_2^{int.} + Q_2^{ext.} = Q' \qquad \Rightarrow \qquad Q_2^{ext.} = -Q_2^{int.} + Q' = Q_1 + Q' .$$

  3/ Conducteur 2 neutre et relié au sol (donc $Q_2^{ext.} = 0$) (fig.3):

$$Q_2^{tot.} = Q_2^{int.} + Q_2^{ext.} = Q_2^{int.} + 0 = Q_2^{int.} = -Q_1 \Rightarrow Q_2^{ext.} = 0 .$$

  *<u>Remarque</u> : Le conducteur 2 relié à la Terre constitue un <u>autre conducteur</u> unique dont la charge totale est nulle. Le* $Q_2^{tot.} = -Q_1$ *ne concerne que l'armature externe du condensateur.*

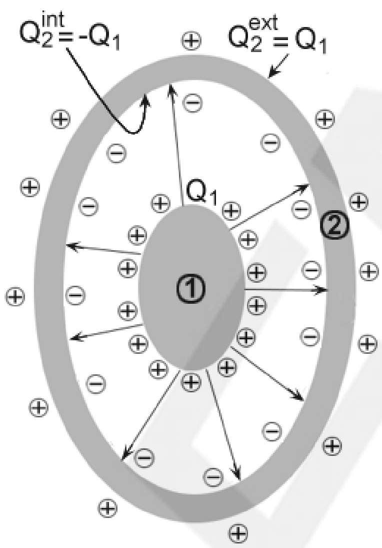


Figure 1

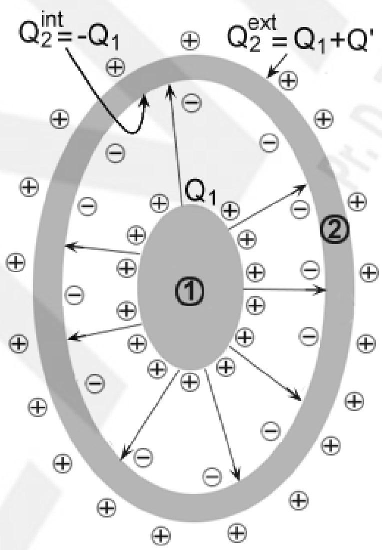


Figure 2

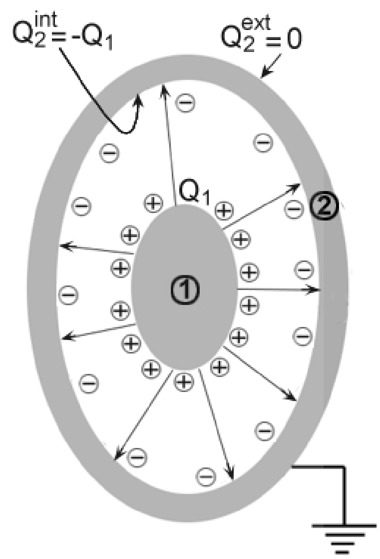


Figure 3



### II.9.2- CAPACITE DU CONDENSATEUR

*On appelle charge du condensateur, la charge portée par l'armature 1 en valeur absolue ; dans le cas de la figure ci-dessus, on a : $Q = Q_1 = \left|Q_2^{int.}\right|$.

*Les armatures 1 et 2 sont respectivement aux potentiels $V_1$ et $V_2$.

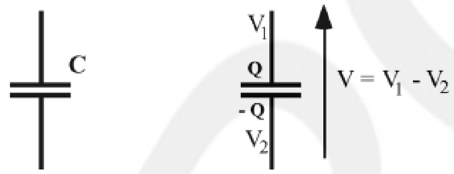
*On définit la capacité du condensateur par le rapport de sa charge Q et de la différence de potentiel entre ses deux armatures $(V_1 - V_2)$, soit :

$$\mathbf{C = \frac{Q}{V_1 - V_2}}$$

*La capacité du condensateur dépend de sa forme, de ses dimensions ainsi que de la permittivité ε du diélectrique.

*Un condensateur sert à emmagasiner de l'énergie électrique. L'intérêt est de stocker beaucoup de charges sur ses armatures, ce qui dépend de sa différence de potentiel, de la nature du diélectrique et de sa géométrie.

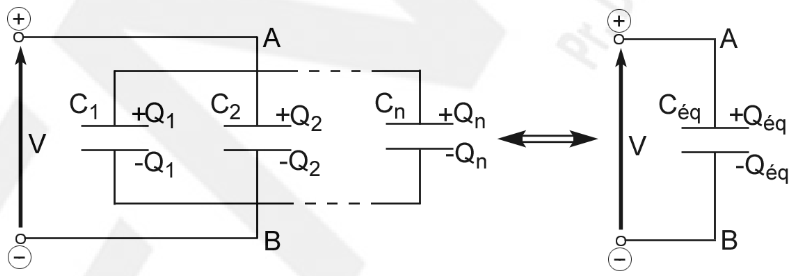
* Le symbole électrique du condensateur est :




### II.9.3- ASSOCIATIONS DE CONDENSATEURS

### II.9.3.1- Association de condensateurs en parallèle

Soit n condensateurs de capacités $C_1,\ldots,C_n$ montés en parallèle : Les armatures positives $+Q_i$ sont reliées au point A et ont toutes un potentiel $V_A$, tandis que les armatures négatives $-Q_i$ sont reliées au point B et ont toutes un potentiel $V_B$.




La différence de potentiel V entre les armatures de chacun de ces condensateurs est :

$$V = V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \ldots = \frac{Q_n}{C_n} \Rightarrow Q_i = VC_i\,.$$

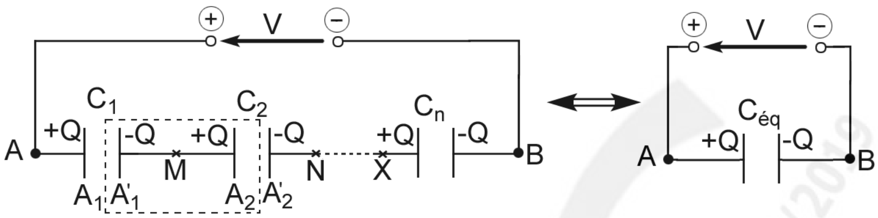
Le condensateur équivalent au borne duquel existe la ddp V a sa charge $Q_{éq.}$ égale à :

$$Q_{éq} = VC_{éq} = \sum_{i=1}^{n} Q_i = V\sum_{i=1}^{n} C_i$$

Donc, la capacité équivalente est : $C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

### II.9.3.2- Association de condensateurs en série

Soit n condensateurs de capacités $C_1,\ldots,C_n$ montés en série.




Les ddp entre les armatures des condensateurs sont respectivement $V_1,\ldots,V_n$ et la ddp de l'ensemble est :

$$V = V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_N) + \ldots + (V_X - V_B) = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \,.$$

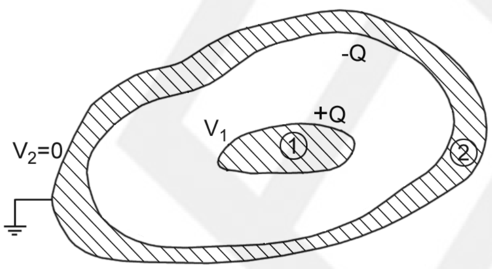
Concernant le condensateur de capacité $C_1$, l'armature $A_1$ porte la charge $+Q_1$ et l'armature $A'_1$ porte la charge $-Q_1$.

Quelle est la charge du condensateur de capacité $C_2$ ? Les armatures $A'_1$ et $A_2$ reliées électriquement constituent un seul conducteur de charge totale nulle, car initialement, étant nulle, elle le reste quel que soit t. Donc la charge de l'armature $A_2$ est $+Q$. Par influence totale, la charge de l'armature $A'_2$ sera $-Q$. On procède de la même manière jusqu'au dernier condensateur de capacité $C_n$. Ainsi, la charge de tous ces condensateurs est la même : $+Q$.

Donc : $$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n} = Q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_{éq}}$$

La capacité équivalente est telle que : $$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

### II.9.4- ENERGIE POTENTIELLE D'UN CONDENSATEUR




On utilise l'expression établie au paragraphe II.7 :

$$\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}\sum Q_i V_i = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}QV\,,$$

soit : $\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}CV^2$

Si l'armature externe est relié électriquement à la Terre, alors $V_2 = 0$ et $\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$

(en notant $V_1 = V$ ).