ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE CONSTANTINE
ANNEE PREPARATOIRE
ALGEBRE II

<u>Cours : semaine du 15 au 19 mars 2020</u>

1- On appelle rang d'une application linéaire $f : X \to Y$ la dimension de $\operatorname{Im} f$ noté $rang(f)$

2- L'équation du rang stipule:

$$\dim X = \dim \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f} = \dim \ker f + \underbrace{rang(f)}$$

▲En effet, supposons $\dim_K X = n$ et soit $e_1, e_{2,}..., e_p$ une base de $\ker f \underset{l}{\subseteq} X$ (ainsi $p \leq n$).

Si $p = n$ alors $\ker f = X$ et donc $f(X) = \{\theta_Y\}$ donc $\dim_K \operatorname{Im} f = 0$ il s'en suit $\dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{Im} f = \dim_K X + 0 = \dim_K X$.

Si $p < n$, prolongeons le système libre $e_1, e_{2,}..., e_p$ de X à une base de X en lui concaténant les vecteurs $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_q$ où $q = n - p$.

Ainsi le système: $\underbrace{e_1, e_{2,}..., e_p; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_q}$ constitué de n vecteurs est une base de X.

Alors:

a– Si $y \in \operatorname{Im} f$ il existe $x \in X$ avec

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_p e_p + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + ... + \beta \omega_q$$

et donc

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \\ &= \overbrace{f(\underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha e_p}_{\in \ker f})} + \overbrace{\beta_1 f(\omega_1) + \beta_2 f(\omega_2) + ... + \beta_q f(\omega_q)} = \\ &= \overbrace{\theta_Y} + \overbrace{\beta_1 f(\omega_1) + \beta_2 f(\omega_2) + ... + \beta_q f(\omega_q)} = \\ &= \beta_1 f(\omega_1) + \beta_2 f(\omega_2) + ... + \beta_q f(\omega_q). \end{aligned}$$

On déduit que

$$\operatorname{Im} f = l(f(\omega_1), f(\omega_2), ..., f(\omega_q)).$$

b– Une combinaison linéaire du type :

$$\lambda_1 f(\omega_1) + \lambda_2 f(\omega_2) + ... + \lambda_q f(\omega_q) = \theta_Y$$

fournit

$$f(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + ... + \lambda_q\omega_q) = \theta_Y$$

qui exprime que

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + ... + \lambda_q\omega_q \in \ker f.$$

Donc

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + ... + \lambda_q\omega_q = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + ... + \delta_p e_p$$

où $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_p \in K$ sont les coordonnées du vecteur $\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+...+\lambda_q\omega_q$ dans la base $e_1, e_2, ..., e_p$ de $\ker f$.

Or $e_1, e_2, ..., e_p; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_q$ est une base de X donc libre ainsi de:

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + ... + \lambda_q\omega_q - \delta_1 e_1 - \delta_2 e_2 - ... - \delta_p e_p = \theta_X$$

on conclut que tous les scalaires sont nuls en particulier $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_q = 0$.

On déduit alors que $f(\omega_1), f(\omega_2), ..., f(\omega_q)$ est un système libre.

En somme $f(\omega_1), f(\omega_2), ..., f(\omega_q)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et donc:

$$\dim_K \operatorname{Im} f = q = n - p = \dim_K X - \dim_K \ker f.$$

■

Commentaires:

♠ L'ensemble des applications linéaires de source X et de but Y est noté $\mathcal{L}(X,Y)$. Il est évident que $\mathcal{L}(X,Y)$ est un sous ensemble de Y^X ensemble des applications de source X et but Y.

♠ Si (X,K) est un espace vectoriel l'ensemble $\mathcal{L}(X,K)$ est noté X^*, appelé dual de X. Un élément du dual X^* est appelé une forme linéaire sur X.

♠ Rappelons qu'une application linéaire $f : X \to Y$ qui est un épimorphisme et un monomorphisme à la fois est appelé un isomorphisme.

On note:

$$\mathcal{I}so(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \ \text{ application linéaire et surjective et injective}\}$$

♠ Une application linaire $f : X \to X$ (e.v.*source* = e.v.*but*) est appelée un endomorphisme.

On note:

$$\mathcal{E}nd(X) = \{f : X \to X \mid f \ \text{ linéaire}\} = \mathcal{L}(X,X)$$

♠ Un endomorphisme injectif et surjectif à la fois est appelé un automorphisme.

On note:

$$\mathcal{A}ut(X) = \mathcal{I}so(X,X)$$

3- Si $f \in \mathcal{E}nd(X)$ alors on a l'équivalence :

f épimorphisme **si et seulement si** f monomorphisme .

► Si $f : X \to X$ est un endomorphisme surjective donc $\operatorname{Im} f = X$ ainsi l'équation du rang fournit: $\dim_K X = \dim_K X + \dim_K \ker f$ qui traduit $\dim_K \ker f = 0$ donc $\ker f = \{\theta_X\}$.

On conclut que f est un monomorphisme.

◄ Si $f : X \to X$ est un endomorphisme injectif donc $\ker f = \{\theta_X\}$ ainsi l'équation du rang fournit: $\dim_K X = \dim_K \operatorname{Im} f + 0$ qui traduit $\dim_K X = \dim_K \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Im} f = X$.

On conclut que f est un épimorphisme.■

4- Une conséquence directe du résultat 3 ci dessus formulé est :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{A}ut(X) &\ \textbf{si et seulement si } f \text{ est un épimorphisme} \\ &\ \textbf{si et seulement si } f \text{ est un monomorphisme.} \end{aligned}$$

5- Une application linéaire est complétement déterminée **si et seulement si** on connait l'image d'une base de la source.

◀ Il est évident que si on connait $f : X \to Y$ c.a.d on connait $f(x) \in Y$ pour tout $x \in X$ donc à fortiori si $e_1, e_2, ..., e_{\dim_K X}$ est une base de X on connait $f(e_1), f(e_2), ...f(e_{\dim_K X})$.

▶ Soit $e_1, e_2, ..., e_{\dim_K X}$ une base de X et supposons que les images $f(e_1), f(e_2), ...f(e_{\dim_K X})$ soient données. Ainsi, si $x \in X$ on a

$$x = \alpha e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{\dim_K X} e_{\dim_K X}$$

alors son image est $f(x) = \alpha f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_{\dim_K X} f(e_{\dim_K X})$.■

<u>Commentaires</u>

En vertu du résultat 5 ci dessus, pour construire une application linéaire

$$f : X \to Y$$

où (X, K) est un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de fixer une base

$$B : e_1, e_2, ..., e_n$$

de X et de définir les images $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ des vecteurs de cette B par f, alors si

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

où $\dim_K X = n$, on a:

$$f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_n f(e_n).$$

Ainsi définie $f : X \to Y$ est une application linéaire. On dit qu'on prolonge f par linéarité.sur X .

6- Une application linéaire $f : X \to Y$ est un épimorphisme

si et seulement si

l'image de tout système générateur de X est un système générateur de Y.

▶ Supposons que $f : X \to Y$ soit un épimorphisme et soit $e_1, e_2, ...e_n$.un système générateur de X $(n \geq \dim_K X)$. Alors si $y \in Y$ il existe:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

avec $f(x) = y$.

Donc

$$y = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_n f(e_n)$$

On déduit alors que:

$$Y = l(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)).$$

◀Supposons que $w_1, w_2, ..., w_p$ soit un système générateur de X $(p \geq \dim_K X)$ tel que $f(w_1), f(w_2), ..., f(w_p)$ soit générateur de Y. Alors pour $y \in Y$ on a:

$$y = \lambda_1 f(w_1) + \lambda_2 f(w_2) + ... + \lambda_p f(w_p)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$, donc $y = f(\underbrace{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_p w_p})$. Il s'en suit qu'il existe:

$$x = \underbrace{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_p w_p} \in X$$

tel que $y = f(x)$.■

<u>Commentaires</u>

Dans la preuve de la condition suffisante du résultat ci dessus, on constate qu'il suffit de l'existence d'un système générateur de X dont l'image est générateur de Y pour que f soit un épimorphisme.

7- Une application linéaire $f : X \to Y$ est un monomorphisme

si et seulement si

l'image de tout système libre de X est un système libre de Y.

► Supposons que $f : X \to Y$ soit un monomorphisme et considèrons $e_1, e_2, ..., e_n$ un système libre de X ($n \leq \dim_K X$). Considérons une combinaison linéaire du type:

$$\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_n f(e_n) = \theta_Y$$

dés lors :

$$f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n) = \theta_Y$$

D'autre part l'égalité suivante est satisfaite:

$$f(\theta_X) = \theta_Y$$

De l'injectivité de f on atteste l'égalité:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = \theta_Y \tag{1}$$

Or le système de vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ est libre, par conséquent tous les scalaires de la combinaison 1 sont nuls et donc $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ est un système libre de Y.

◄Supposons que l'image de tout système libre de X soit un système libre de Y et considéronsun vecteur $x \in X$ tel que $x \neq \theta_X$ donc x est libre et ainsi par hypothèse $f(x)$ est libre de Y par conséquent $f(x) \neq \theta_Y$. Il s'en suit que le seul vecteur de X dont l'image est θ_Y est le vecteur nul θ_X de X. Autrement dit

$$\ker f = \{\theta_X\}$$

Ce qui asserte que f est un monomorphisme.■

8- Les résultats 6 et 7 et le commentaire ci dessus offrent les propriétés équivalentes ci dessous stipulées:

- **8.1** Une application linéaire $f : X \to Y$ est un isomorphisme **si et seulement si** l'image par f de toute base de X est une base de Y.

►Supposons que $f : X \to Y$ soit un isomorphisme donc un épimorphisme et un monomorphisme alors si $e_1, e_2, ..., e_n$ où $n = \dim_K X$ est une base de X il s'en suit que $e_1, e_2, ..., e_n$ est générateur et libre donc $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ est générateur et libre de Y donc une base.

◀Si $e_1, e_2, ..., e_n$ où $n = \dim_K X$ est une base de X, alors en sa qualité de système générateur de X le système $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ est générateur de Y car $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ est une base de Y, donc f est un épimorphisme.

Enfin si $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$ où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ sont les coordonnées de x dans la base $e_1, e_2, ..., e_n$ de X tel que $f(x) = \theta_Y$, alors:

$$\theta_Y = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + ... + \alpha_n f(e_n)$$

Usant de l'indépendance de $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ en qualité de base de Y; on conclut que $\alpha_1 = \alpha = ... = \alpha_n = 0$. En somme $x = \theta_X$ qui traduit que $\ker f = \{\theta_X\}$ et donc f est un monomorphisme.

■

- **8.2** Une application linéaire $f : X \to Y$ est un isomorphisme

si et seulement si

l'image **d'une base** de X par f est une base de Y.

La preuve de la condition nécessaire et suffisante est décrite dans celle du résultat 8.1.■

♠ Deux espace vectoriels X et Y définis sur un même corps commutatif K sont dit isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : X \to Y$.

9- Deux espace vectoriels sont isomorphes

si et seulement si

ils ont une même dimension.

▶ Certes, si X et Y sont isomorphes alors il existe un ismorphisme $f : X \to Y$ et donc l'image d'une base de X est une base de Y et donc $\dim_K X = \dim_K Y$.

◀ Si $\dim_K X = \dim_K Y = n$ considérons $e_1, e_2, ..., e_n$ une base X et $w_1, w_2, ..., w_n$ est une base de Y alors on peut définir une application linéaire $f : X \to Y$ caractérisée par:

$$f(e_1) = w_1, \ f(e_2) = w_2, ..., \ f(e_n) = w_n$$

Une telle application (prolongée par linéarité: voir résultat 5 avec commantaires) est un isomorphisme d'aprés le résultat 8.2.■

10- Tout espace vectoriel (E, K) tel que $\dim_K X = n$ est isomorphe à l'espace vectoriel (K^n, K).

▲ Certes, on a $\dim_K X = n = \dim_K K^n$. Dés lors, le résultat 9 offre la conclusion.■

11- Si (X, K) est un espace vectoriel et p, q sont deux entiers naturels donnés alors les espaces vectoriels $(X^p \times X^q, K)$. et (X^{p+q}, K) sont isomorphes.

▲ En effet, $\dim_K X^p \times X^q = p + q = \dim_K X^{p+q}$. On conclut en s'aidant du résultat 9.■

12- Si $f \in \mathcal{I}so(X, Y)$ alors l'application réciproque satisfait $f^{-1} \in \mathcal{I}so(Y, X)$.

▲ Rappelons que la correspondance notée $f^{-1} : Y \to X$ caractérisée par $f^{-1}(y) = x$ si et seulement si $f(x) = y$ pour tout élément $y \in Y$ est une application bijective appelée application réciproque de f.

Montrons que $f^{-1} : Y \to X$ est une application linéaire:

a- si $y_1, y_2 \in Y$ où $f^{-1}(y_1) = x_1$ et $f^{-1}(y_2) = x_2$ alors $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

Dés lors l'égalité $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2)$ équivalente à $y_1 + y_2 = f(x_1 + x_2)$ conduit à:

$$f^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$$

d'où:

$$f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$$

b- pour λ un scalaire et y un vecteur de Y satisfaisant $f^{-1}(y) = x$ on a: $y = f(x)$ d'où $\lambda y = \lambda f(x)$ qui traduit $\lambda y = f(\lambda x)$ et par conséquent:

$$f^{-1}(\lambda y) = \lambda \underbrace{x}$$

On conclut aisément que:

$$f^{-1}(\lambda y) = \lambda \underbrace{f^{-1}(y)}$$

■

13- Si $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $f \in \mathcal{L}(Y, Z)$ alors leur composée $f \circ g \in \mathcal{L}(X, Z)$ où $f \circ g(x) = f(g(x))$ pour tout vecteur $x \in X$.

▲ Si x et y sont deux vecteurs de X et α, β sont deux scalaires alors :

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\alpha x + \beta y) &= f(g(\alpha x + \beta y)) = \\
&= f(g(\alpha x) + g(\beta y)) = \\
&= f(\alpha g(x) + \beta g(y)) = \\
&= f(\alpha g(x)) + f(\beta g(y))) = \\
&= \alpha f(g(x)) + \beta f(g(y)) = \\
&= \alpha \left(f \circ g\right)(x) + \beta \left(f \circ g\right)(y).
\end{aligned}$$

■

14- Si $f, g \in \mathcal{L}(X, Y)$ alors leur somme $f + g \in \mathcal{L}(X, Y)$.où $f + g : X \to Y$ est caractérisée par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout vecteur $x \in X$.

▲ Si x et y sont deux vecteurs de X et α, β sont deux scalaires alors :

$$\begin{aligned}
(f + g)(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= \\
&= f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) + g(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \\
&= f(\alpha \cdot x) + f(\beta \cdot y) + g(\alpha \cdot x) + g(\beta \cdot y) = \\
&= \underbrace{\alpha \cdot f(x)} + \overbrace{\beta \cdot f(y)} + \underbrace{\alpha \cdot g(x)} + \overbrace{\beta \cdot g(y)} = \\
&= \alpha \cdot \underbrace{(f(x) + g(x))} + \beta \cdot \overbrace{(f(y) + g(y))} = \\
&= \alpha \cdot (f + g)(x) + \beta \cdot (f + g)(y).
\end{aligned}$$

■

15- Si $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ et λ est un scalaire alors $\lambda \cdot f \in \mathcal{L}(X, Y)$.où $\lambda \cdot f : X \to Y$ est caractérisée par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout vecteur $x \in X$.

▲ Si x et y sont deux vecteurs de X et α, β sont deux scalaires du corps commutatif associé à X et Y, alors :

$$
\begin{aligned}
(\lambda \cdot f)\,(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= \\
&= \lambda \cdot (f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)) \\
&= \lambda \cdot (f(\alpha \cdot x) + f(\beta \cdot y)) = \\
&= \lambda \cdot (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)) = \\
&= \lambda \cdot (\alpha \cdot f(x)) + \lambda \cdot (\beta \cdot f(y)) = \\
&= (\lambda \cdot \alpha) \cdot f(x) + (\lambda \cdot \beta) \cdot f(y) = \\
&= (\alpha \cdot \lambda) \cdot f(x) + (\beta \cdot \lambda) \cdot f(y) = \\
&= \alpha \cdot \underbrace{(\lambda \cdot f(x))} + \beta \cdot \overbrace{(\lambda \cdot f(y))} = \\
& \quad\ \alpha \cdot \underbrace{(\lambda \cdot f)(x)} + \beta \cdot \overbrace{(\lambda \cdot f)(y)}\,.
\end{aligned}
$$

■