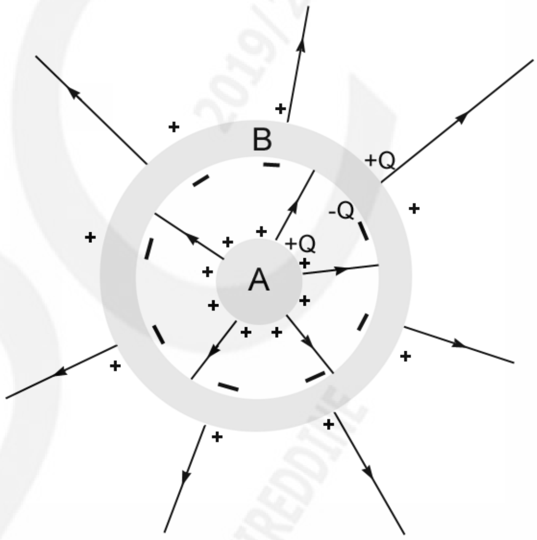
TD SERIE 2 : CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 :

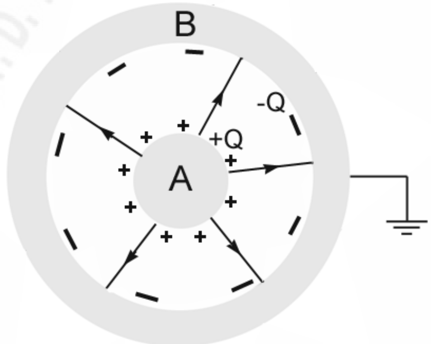
1a/

La surface du conducteur A porte une charge positive (+Q) uniformément répartie.
Le conducteur A se trouve à l'intérieur du conducteur creux B. Il y a influence totale et alors la surface intérieure du conducteur B porte la charge (–Q) uniformément répartie.
Comme initialement le conducteur B ne porte pas de charges (il est neutre), sa charge totale doit rester nulle et donc sa surface extérieure porte la charge (+Q) uniformément répartie.
Dans l'espace entre les deux conducteurs A et B, les lignes de champ partent de la surface du conducteur A et atteignent la surface intérieure de B. Les conducteurs étant sphériques, par symétrie, les lignes de champ sont des portions de droite.
A l'extérieur du conducteur B, les charges (+Q) génèrent des lignes de champ rectilignes qui vont vers l'infini.

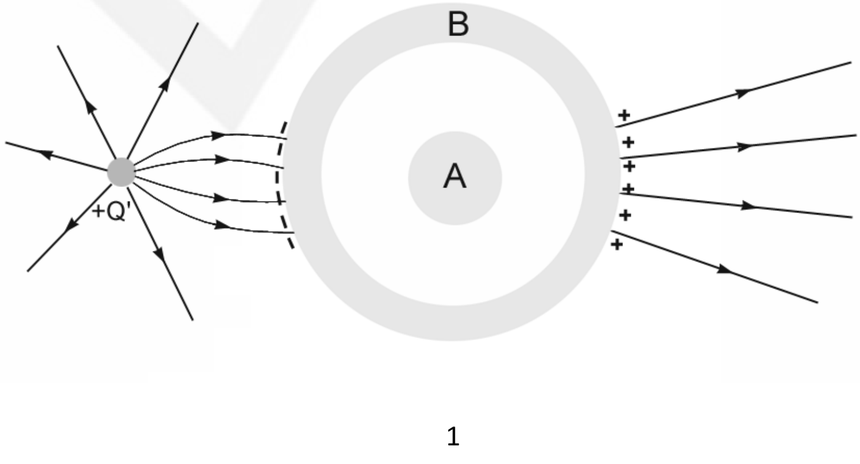


1b/

Dans l'espace entre les deux conducteurs A et B, la situation est identique à (1a) : (+Q) sur la surface de A et (-Q) sur la surface intérieure de B et les lignes de champ vont de A vers B.
A l'extérieur de B, des charges négatives provenant de la Terre vont neutraliser les charges positives (+Q) présentent sur la surface extérieure de B. Donc, à la surface extérieure de B, la charge est nulle et donc, pas de ligne de champ.
Conclusion : L'espace extérieur est protégé de l'influence de A : c'est l'effet écran du conducteur B.



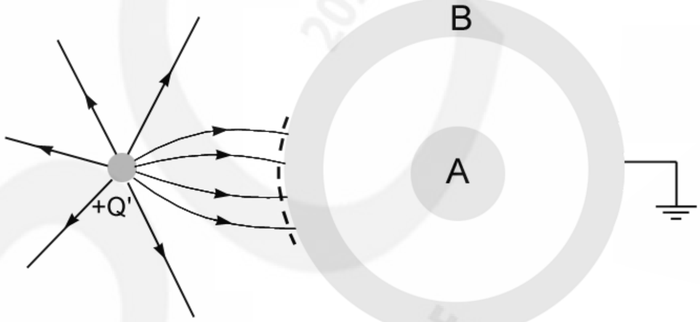
2a/



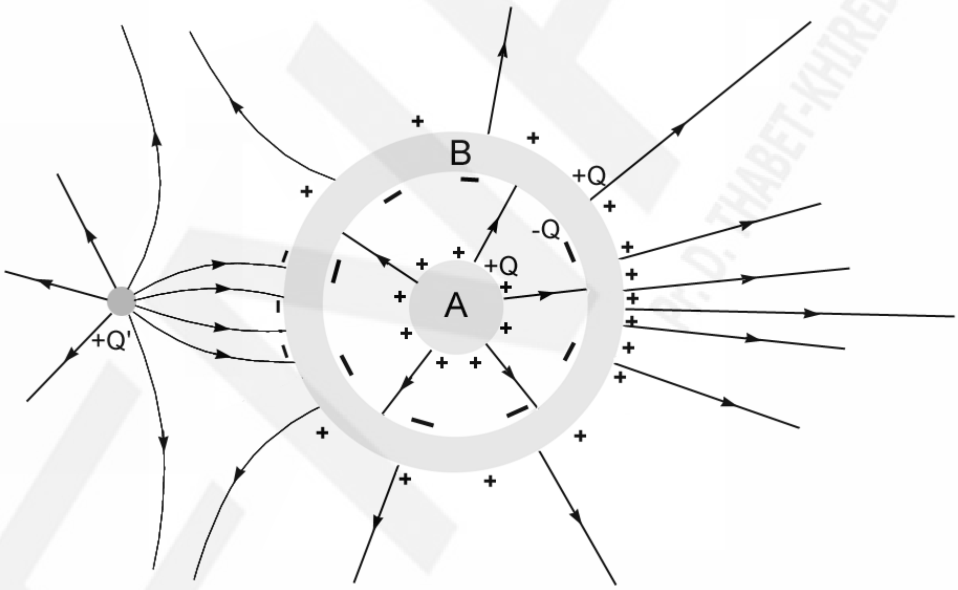
Dans l'espace entre A et B, il n'y a pas de ligne de champ car A est neutre. Donc, il n'y a pas de charge à la surface intérieure de B.
Entre Q' et B, il y a influence partielle. D'après le théorème des éléments correspondants, une charge négative –q (tel que q < Q') va apparaître sur une portion de surface de B faisant face à Q'.
Comme B était initialement neutre, sa charge doit rester nulle. Par conséquent, sur le côté de B diamétralement opposé à la surface contenant (-q), va apparaître une charge (+q).
Dans l'espace entre A et B, aucune ligne de champ.
A l'extérieur de B, les lignes de champ produites par (Q') sont radiales sauf au voisinage B.
Du côté des charges positives de B (+q), les lignes de champ sont radiales.

2b/

La situation est identique à (2a) sauf du côté de B portant la charge (+q).
En effet, B étant relié à la Terre, cette charge (+q) va être neutralisée par les électrons venant de la Terre.
Donc, pas de ligne de champ de ce côté-là.



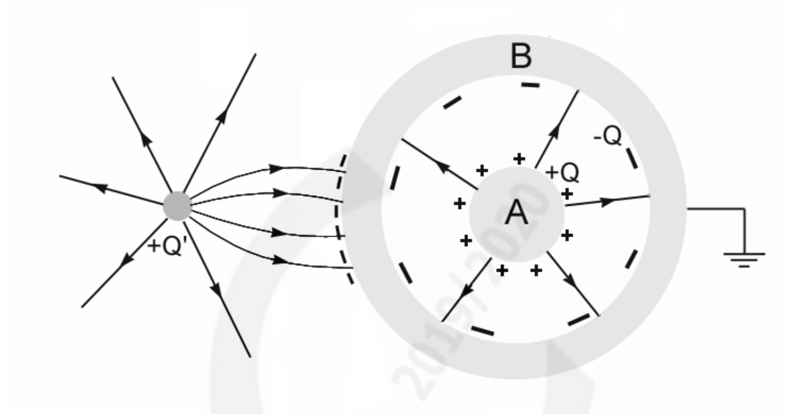
2c/



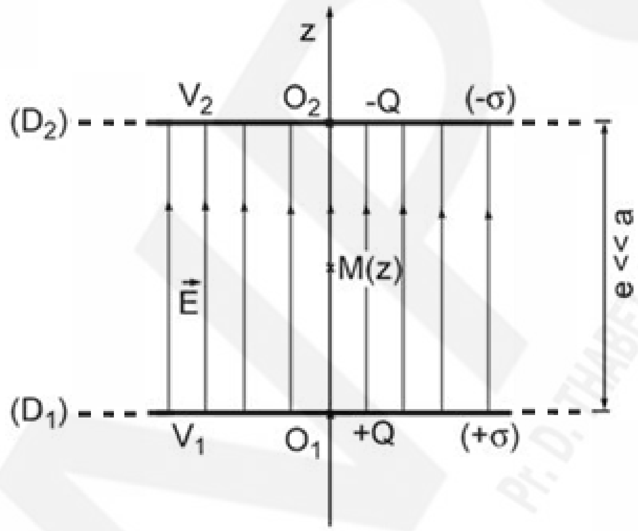
Dans l'espace entre les deux conducteurs A et B, et à l'extérieur de B, la situation est identique à (1a) : (+Q) sur la surface de A, (-Q) sur la surface intérieure de B et (+Q) sur la surface extérieure de B.
De plus, l'influence partielle de (+Q') sur B entraîne une répartition locale supplémentaire de charges négatives d'un côté (en face de (Q')) et positives du côté opposé, comme dans la question (2a).
D'une part, la charge induite par (Q') est la charge (-q) dont une partie va être neutralisée localement par une partie de la charge (+Q) de la surface extérieure de B, en supposant que Q' grand devant Q.
D'autre part, la charge (+q) induite de l'autre côté de B se rajoute localement à la charge répartie sur la surface extérieure de B ce qui entraine un champ plus intense dans cette zone. Donc, comme le nombre de lignes par unité de surface est proportionnel à l'intensité du champ, les lignes de champ seront plus serrées dans cette zone.

2d/

La situation est identique à (2b) avec en plus une charge (+Q) sur A et (-Q) sur la surface intérieure de B (situation 1b).
<u>Conclusion</u> : Les espaces intérieur et extérieur au conducteur B sont indépendants : c'est le principe de l'écran électrostatique ou cage de Faraday.



<u>Exercice 2</u> :



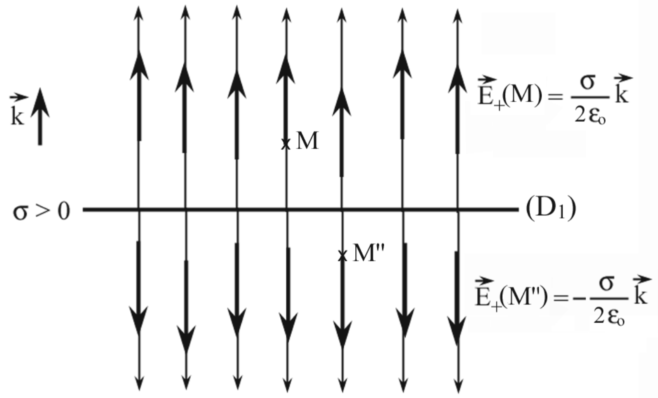
1/ Calcul de $V(M)$:
Pour plus de visibilité, on a agrandi l'espace entre les deux disques.

Soit M un point situé entre les 2 armatures.
$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow V(M) = -\int \vec{E}(M)\cdot d\vec{r} + C$: pour calculer V(M), il faut d'abord calculer $\vec{E}(M)$ (en utilisant le théorème de Gauss).

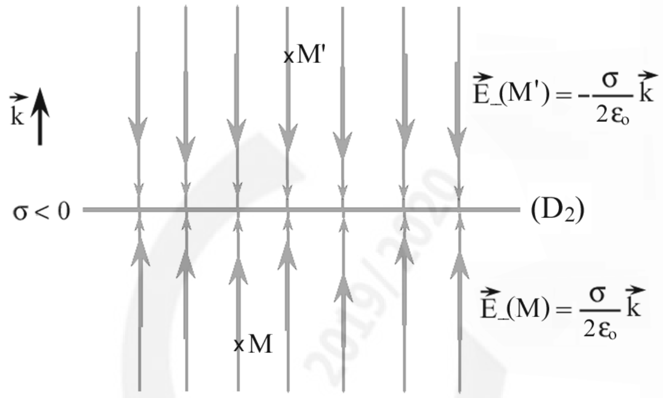
En cours, nous avons calculé le champ $\vec{E}(M)$ créé par un plan infini uniformément chargé et avons trouvé que ce champ a un module constant dans tout l'espace : $\|\vec{E}\| = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_o}$.

Dans cet exercice, les disques D_1 et D_2 peuvent être assimilés à des plans infinis car e << a, c'est-à-dire que, à partir d'un point M situé entre les 2 disques, ces derniers sont vus comme des plans infinis.
Définissons un vecteur unitaire $\vec{k}$ perpendiculaire au plan chargé.

Lignes de champ pour un plan infini avec une densité de charge uniforme positive (disque D_1) :



Lignes de champ pour un plan infini avec une densité de charge uniforme négative (disque D_2) :

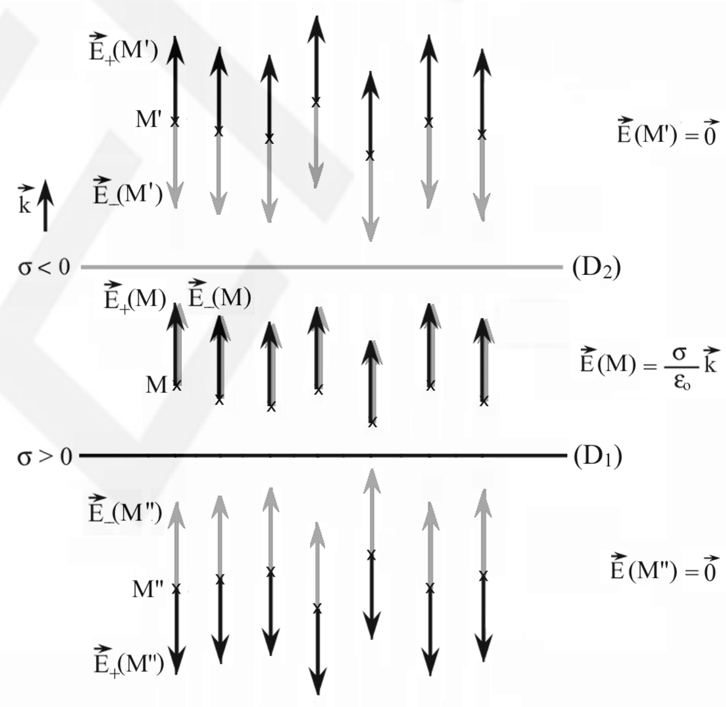


Le champ créé par le disque D_1 est $\vec{E}_+(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{k}$ au-dessus de sa face supérieure et $\vec{E}_+(M'') = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{k}$ au-dessous de sa face inférieure.
Le champ créé par le disque D_2 est $\vec{E}_-(M') = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{k}$ au-dessus de sa face supérieure et $\vec{E}_-(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{k}$ au-dessous de sa face inférieure.

Si on considère maintenant le condensateur (D_1 , D_2), on aura :

- En tout point au-dessus de D_2 : $\vec{E}(M') = \vec{E}_+(M') + \vec{E}_-(M') = \vec{0}$
- En tout point au-dessous de D_1 : $\vec{E}(M'') = \vec{E}_+(M'') + \vec{E}_-(M'') = \vec{0}$
- En tout point entre D_1 et D_2 : $\vec{E}(M) = \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{k}$

Par conséquent, le champ entre les armatures du condensateur est uniforme et égal à : $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{k}$



On en déduit que le champ en tout point M entre les armatures du condensateur est : $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{k}$

Revenons au calcul de V(M) :

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow V(M) = -\int \vec{E}(M)\cdot d\vec{r} + K$$

$$V = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{k}\cdot dz\vec{k} = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_o}dz = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}z + K$$

$$z = 0, \quad V = V_1 = K$$

D'où : $$\mathbf{V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}z + V_1}$$

Les surfaces équipotentielles sont telles que $V = cste$, soit $z = cste$. Par conséquent, les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles aux armatures.

2/ Expression de σ, densité de charge surfacique des armatures du condensateur :

$$V(z = e) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}e + V_1 = V_2$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}e \text{ avec } V_1 > V_2$$

$$\boldsymbol{\sigma = \varepsilon_o \frac{V_1 - V_2}{e}}$$

Ou bien :

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_0^e \vec{E}.d\vec{r} = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_o}dz \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\sigma e}{\varepsilon_o} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_o\frac{V_1 - V_2}{e}$$

3/ L'expression de la capacité C du condensateur plan est:

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma S}{C} \Rightarrow C = \frac{\sigma S}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma\pi a^2}{\sigma e}\times\varepsilon_o\,; \quad \mathbf{C = \frac{\varepsilon_o \pi a^2}{e} = \frac{\varepsilon_o S}{e}}$$

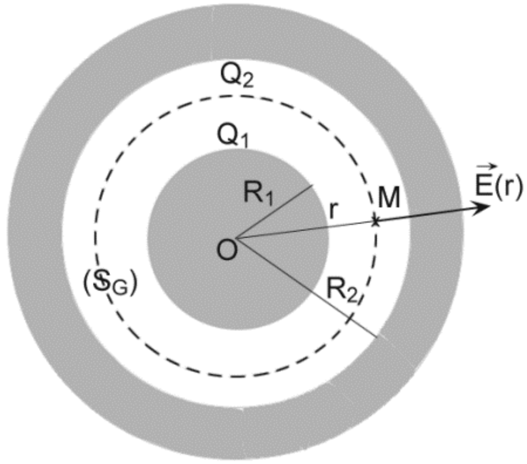
<u>Exercice 3</u> :

1/ Pour calculer la capacité du condensateur, il faut calculer la ddp entre ses deux armatures. Pour cela, il faut d'abord calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ entre ces armatures.

*Les armatures du condensateur sphérique en vis-à-vis portent des charges Q_1 et Q_2 telles que :

$$Q_1 = -Q_2 = Q \text{ (Influence totale)}$$

*Application du théorème de Gauss pour le calcul de $\vec{E}(M)$: considérons une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2 prise comme surface de Gauss. On a :



$$\phi_{S_G} = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.d\vec{S} = \oiint_{(S_G)} EdS = E\oiint_{(S_G)} dS$$

$$= E\times 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

D'où l'expression du champ entre les armatures :

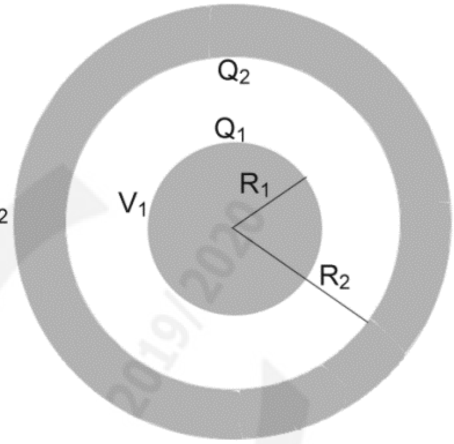
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}_r$$

*On calcule ensuite la ddp entre les armatures du condensateur :

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow -\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$



*Puis on en déduit l'expression de la capacité :

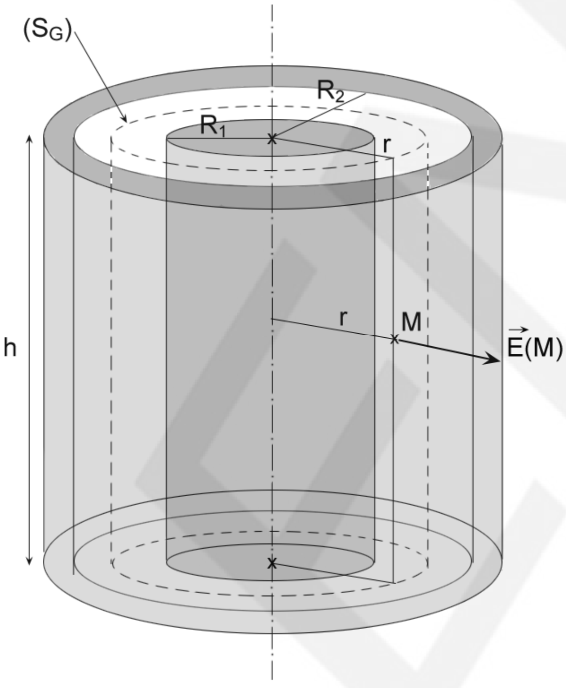
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} \Rightarrow \mathbf{C = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

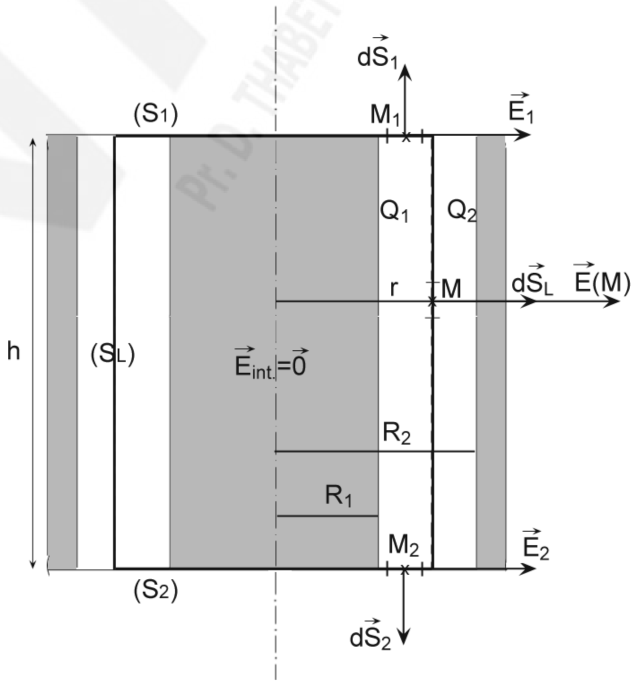
2/ Si la distance entre les armatures $e = R_2 - R_1$ est très petite devant R_1 et R_2, alors, en posant $R_1 = R$, on a :

$$C = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\varepsilon_o \frac{R(R+e)}{e} \approx \frac{4\pi R^2 \varepsilon_o}{e} \Rightarrow \mathbf{C = \frac{\varepsilon_o S}{e}} \qquad (R + e \approx R)$$

où S est la surface de l'armature intérieure, sensiblement égale à la surface intérieure de l'armature (2).
On retrouve une expression analogue à la capacité d'un condensateur plan.

<u>Exercice 4</u> :





1/ *Calculons tout d'abord le champ en un point M(r) compris entre les armatures cylindriques du condensateur par le théorème de Gauss, avec $R_1 < r < R_2$, les cylindres étant considérés comme infinis.
Choisissons comme surface de Gauss un cylindre de même axe que les armatures, de rayon r et de hauteur h :

$$S_G = S_1 + S_2 + S_L$$

où S_1 et S_2 sont les disques qui ferment le cylindre de Gauss et S_L sa surface latérale.

Par raison de symétrie (σ étant constant et le condensateur étant considéré comme infini), le champ $\vec{E}$ à l'extérieur du conducteur intérieur, comme pour le fil infini, est toujours radial (perpendiculaire à l'axe du

cylindre).
Donc, les flux élémentaires :

$$d\phi_1 = \vec{E}_1(M_1).d\vec{S}_1 = 0 \text{ et } d\phi_2 = \vec{E}_2(M_2).d\vec{S}_2 = 0$$

car $\vec{E}_1(M_1) \perp d\vec{S}_1$ et $\vec{E}_2(M_2) \perp d\vec{S}_2$.

A l'intérieur de l'armature intérieure, le champ étant nul donc le flux à travers (S_1) est nul.
Par ailleurs :

$$\vec{E}(M) // d\vec{S}_L \Rightarrow \vec{E}(M).d\vec{S}_L = E(M)dS_L .$$

D'où : $\phi_{S_G} = \iint_{S_L} \vec{E}(M).d\vec{S}_L = \iint_{S_L} E(r)dS_L = E(r)\times 2\pi rh = \dfrac{Q}{\varepsilon_o}$ avec Q la charge portée par la surface latérale de l'armature intérieure de hauteur h. Donc : $E(r) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o rh}$ et $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o rh}\vec{u}_r$

*On calcule la ddp entre les armatures :

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow -\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o rh}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o h}[Lnr]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o h}Ln\frac{R_2}{R_1}$$

*On en déduit la capacité du condensateur :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o h}Ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \mathbf{C = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{Ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

Soit, par unité de longueur : $C_{/\text{ unité de longueur}} = \dfrac{2\pi\varepsilon_o}{Ln\frac{R_2}{R_1}}$ (en F/m)

2/ Si la distance entre les armatures $e = R_2 - R_1$ est très petite devant R_1 et R_2, alors, en posant $R_1 = R$, on a :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{Ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{Ln\frac{R+e}{R}} = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{Ln\left(1+\frac{e}{R}\right)} \approx \frac{2\pi\varepsilon_o h}{\frac{e}{R}} = \frac{\varepsilon_o 2\pi Rh}{e} \Rightarrow \mathbf{C = \frac{\varepsilon_o S}{e}}$$

où S est la surface latérale de l'armature intérieure.

On retrouve une expression analogue à celle de la capacité d'un condensateur plan.

N.B. : Le développement limité de la fonction $Ln(1+x)$ *donne :* $Ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots$.

Donc, $\dfrac{e}{R} = \varepsilon << 1 \Rightarrow Ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon = \dfrac{e}{R}$