Ecole Nationale Polytechnique de Constantine
2ème année classe préparatoire
Analyse 3

Série de TD n° 5
Séries entières

Exercice 1 :
Calculer le rayon de convergence des séries de termes généraux :
1. $\frac{(n-1)^n}{(n+1)!} z^n$ 2. $\log(n)^n z^n$ 3. $\frac{(-1)^n}{(n+1)^n} z^n$ 4. $\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n z^n$
5. $\left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\right) z^n$, $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ 6. $\frac{2^n}{n+1} z^{2n+1}$
7. $\frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}$ 8. $a_n z^n$, avec $a_n = \begin{cases} \frac{1}{k+\sqrt{k}} & \text{si } n = 3k \\ k^{-k} & \text{si } n = 3k+1 \\ 8^k & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$
9. $\frac{(z-3)^n}{2^n}$ (déterminer le disque de convergence de cette série).

Exercice 2 :
Dans chaque cas, déterminer le rayon de convergence R et l'ensemble C (resp. A) des nombres réels pour lesquels la série entière de coefficients a_n, converge simplement (resp. absolument).
1. $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ 2. $a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}$ 3. $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$ 4. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 :
1. Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme des séries entières de variable réelle suivantes.
   a. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n$.
   b. $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, avec $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
2. Calculer la somme des séries numériques suivantes.
   a. $\sum_{n\geq 0} \frac{5^n}{n!}$ *b.* $\sum_{n\geq 0} (n+1)2^{-n}$ *c.* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *d.* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4 :
Dans chaque cas, développer la fonction f en série entière au voisinage de 0, et préciser le rayon de convergence R.
1. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.
3. $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$.
4. $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$.

Exercice 5 :
1. Chercher les fonctions $y(x)$ développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle $xy'' + (x-1)y' - y = 0$.
2. Chercher la fonction $y(x)$ développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle $y'' - 2xy' - 2y = 0$, et qui vérifie les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.