Corrigée de l'exercice 03 : (Méthodes directes)

Appliquons l'algorithme de Gauss ; la première étape de l'élimination consiste à retrancher la première ligne à toutes les autres, c.à.d. à multiplier A à gauche par E_1, avec

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$E_1 A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix}.$$

La deuxième étape consiste à multiplier A à gauche par E_2, avec

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix}.$$

Enfin, la troisième étape consiste à multiplier A à gauche par E_3, avec

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}.$$

On $A = LU$ avec $L = (E_3E_2E_1)^{-1} = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1}(E_3)^{-1}$; les matrices $(E_1)^{-1}$, $(E_2)^{-1}$ et $(E_3)^{-1}$ sont faciles à calculer : la multiplication à gauche par $(E_1)^{-1}$ consiste à ajouter la première ligne à toutes les suivantes ; on calcule de la même façon $(E_2)^{-1}$ et $(E_3)^{-1}$. On obtient (sans calculs !) :

$$(E_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (E_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (E_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{et donc } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}.$$

La matrice L est inversible car produit de matrices élémentaires, et la matrice A est donc inversible si et seulement si la matrice U l'est. Or U est une matrice triangulaire qui est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont non nuls, c.à.d. $a \neq 0$, $b \neq c$ et $c \neq d$.

Corrigé de l'exercice 05 (Méthodes directes)

Calculons le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour chacune des méthodes :

1. Le calcul de chaque coefficient nécessite n multiplications et $n-1$ additions, et la matrice comporte n^2 coefficients. Comme la matrice est symétrique, seuls $n(n+1)/2$ coefficients doivent être calculés. Le calcul de A^2 nécessite nécessite donc $\frac{(2n-1)n(n+1)}{2}$ opérations élémentaires.
   Le nombre d'opérations élémentaires pour effectuer la décomposition LL^t de A^2 nécessite $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ (cours).
   La résolution du système $A^2x = b$ nécessite $2n^2$ opérations (n^2 pour la descente, n^2 pour la remontée, voir cours).
   Le nombre total d'opérations pour le calcul de la solution du système $A^2x = b$ par la première méthode est donc $\frac{(2n-1)n(n+1)}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{4n^3}{3} + O(n^2)$ opérations.

2. La décomposition LL^t de A nécessite $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$, et la résolution des systèmes $LL^ty=b$ et $LL^tx=y$ nécessite $4n^2$ opérations. Le nombre total d'opérations pour le calcul de la solution du système $A^2x=b$ par la deuxième méthode est donc $\frac{n^3}{3}+\frac{9n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n^3}{3}+O(n^2)$ opérations.

Pour les valeurs de n assez grandes, il est donc avantageux de choisir la deuxième méthode.

<u>Exercices supplémentaires :</u>

Exercice 06

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est symétrique définie positive.
2) Ecrire l'algorithme de factorisation de Cholesky.
3) Déterminer la matrice L triangulaire inférieure telle que $A=LL^T$.

Eléments de réponse :

1) $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=1>0$, donc A est définie positive.

2) $\begin{cases}L_{11}=\sqrt{a_{11}}=1\\ L_{21}=\dfrac{a_{21}}{L_{11}}=1\\ L_{31}=\dfrac{a_{31}}{L_{11}}=1\\ L_{41}=\dfrac{a_{41}}{L_{11}}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}L_{22}=(a_{22}-L_{21}^2)^{1/2}=1\\ L_{32}=\dfrac{a_{32}-L_{31}L_{21}}{L_{22}}=1\\ L_{42}=\dfrac{a_{42}-L_{41}L_{21}}{L_{22}}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}L_{33}=(a_{33}-L_{31}^2-L_{32}^2)^{1/2}=1\\ L_{43}=\dfrac{a_{43}-L_{41}L_{31}-L_{42}L_{32}}{L_{33}}=1\\ L_{44}=(a_{44}-L_{41}^2-L_{42}^2-L_{43}^2)^{1/2}=1\end{cases}$

3) $L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Exercice 07

Soit $A\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&1\\1&0&3&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$ et $b\in\mathbb{R}^4$.

1) Résoudre le système linéaire $Ax=b$ par la méthode de Gauss. En déduire A^{-1}.
2) Montrer que les factorisations Doolittle, Crout et Cholesky de A sont identiques.
3) Montrer que $x^TAx=\sum_{i=1}^4(y_i(x))^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^4$, où les $y_i(x)$, $i=\overline{1,4}$ sont à déterminer.

Eléments de réponse :

1.1) $\widetilde{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&b_1\\0&1&-1&0&b_2-b_1\\0&-1&2&1&b_3-b_1\\0&0&1&2&b_4-b_1\end{array}\right)$, $\widetilde{A}^{(2)}=\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&b_1\\0&1&-1&0&b_2-b_1\\0&0&1&1&b_3+b_2-2b_1\\0&0&1&2&b_4-b_1\end{array}\right)$,

$\widetilde{A}^{(3)}=\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&b_1\\0&1&-1&0&b_2-b_1\\0&0&1&1&b_3+b_2-2b_1\\0&0&0&1&b_4-b_3-b_2+b_1\end{array}\right)$ et $A^{(3)}x=b^{(3)}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_4+x_3&=&b_1\\ x_2-x_3&=&b_2-b_1\\ x_3+x_4&=&b_3+b_2-2b_1\\ x_4&=&b_4-b_3-b_2+b_1\end{cases}$

Donc $x=\begin{pmatrix}7b_1-4b_2-3b_3+b_4\\-4b_1+3b_2+2b_3-b_4\\-3b_1+2b_2+2b_3-b_4\\b_1-b_2-b_3+b_4\end{pmatrix}=A^{-1}b$, où $A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-4&-3&1\\-4&3&2&-1\\-3&2&2&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

1.2) $A=LU$, $L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&-1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}A=LU,\ L_{ii}=1,\ i=1,2,3,4\\ A=LU,\ U_{ii}=1,\ i=1,2,3,4\\ A=LL^T,\ L_{ii}>0,\ i=1,2,3,4\end{cases}$

Les 3 factorisations sont identiques suite à leurs unicité.

1.3) $x^TAx=x^TLL^Tx=(L^Tx)^T(L^Tx)=\|L^Tx\|_2^2=\sum_{i=1}^4(y_i(x))^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^4$, donc
$y_1(x)=x_1+x_2+x_3+x_4$, $y_2(x)=x_2-x_3$, $y_3(x)=x_3+x_4$, $y_4(x)=x_4$.