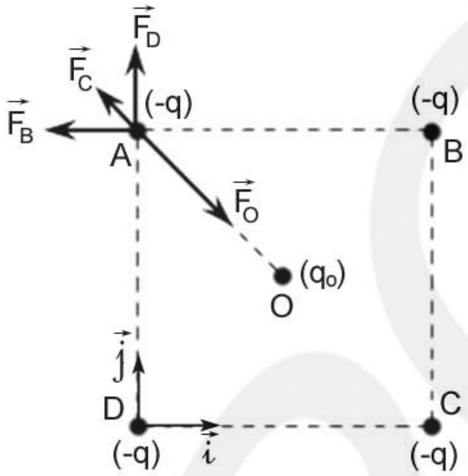
E.N.P. DE CONSTANTINE
CLASSE PREPARATOIRE/ 1ère ANNEE/ PHYSIQUE 2
2019/2020

TD SERIE 1 : ELECTROSTATIQUE
SOLUTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 :



1/ Vue la symétrie de la répartition des charges, on peut calculer indifféremment la force totale aux sommets A, B, C ou D du carré. Par exemple, calculons la force totale en A :

$$\vec{F}(A) = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|^3} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|^3} + \frac{\overrightarrow{DA}}{\|\overrightarrow{DA}\|^3}\right] - \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|^3}$$

$$\overrightarrow{BA} = -a\vec{i} \Rightarrow \|\overrightarrow{BA}\| = a \Rightarrow \|\overrightarrow{BA}\|^3 = a^3$$

$$\overrightarrow{CA} = -a\vec{i} + a\vec{j} \Rightarrow \|\overrightarrow{CA}\| = a\sqrt{2} \Rightarrow \|\overrightarrow{CA}\|^3 = 2\sqrt{2}a^3$$

$$\overrightarrow{DA} = a\vec{j} \Rightarrow \|\overrightarrow{DA}\| = a \Rightarrow \|\overrightarrow{DA}\|^3 = a^3$$

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} \Rightarrow \|\overrightarrow{OA}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow \|\overrightarrow{OA}\|^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3$$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{-a\vec{i}}{a^3} + \frac{-a\vec{i} + a\vec{j}}{2\sqrt{2}a^3} + \frac{a\vec{j}}{a^3}\right] - \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o a^3}\left(\frac{a}{2}\right)\frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \times 4$$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o a^2}\left[-\vec{i} + \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{2\sqrt{2}} + \vec{j}\right] - \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o a^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{FA} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o a^2}\left[\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)q - \frac{2}{\sqrt{2}}q_o\right]\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$$

2/ Relation entre q et q_o pour que la force exercée sur les charges placées aux sommets du carré soit nulle :

$$\vec{F}(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o a^2}\left[q\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - q_o\frac{2}{\sqrt{2}}\right]\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) = \vec{0}$$

$$q\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - q_o\frac{2}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \mathbf{q_o = q\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 2 :

Les champs créés par les 4 charges q positives identiques sont symétriques deux à deux par rapport à l'axe Oz et égaux en module (figure 1) :

$$\|\vec{E}_A\| = \|\vec{E}_B\| = \|\vec{E}_C\| = \|\vec{E}_D\|$$

Considérons les deux charges placées en A et C. Elles créent respectivement en M les champs $\vec{E}_A$ et $\vec{E}_C$ dont la somme vectorielle est le vecteur $\vec{E}_1 = \vec{E}_A + \vec{E}_C$ porté par Oz (figure 2).

De même, pour les deux charges placées en B et D, elles créent respectivement en M les champs $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_D$ dont la somme vectorielle est également le vecteur $\vec{E}_1 = \vec{E}_B + \vec{E}_D$ porté par Oz (figure 3).

Par conséquent, le champ total créé par les 4 charges est le champ $\vec{E}(M) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = 2\vec{E}_1$ porté par l'axe Oz : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{k}$.

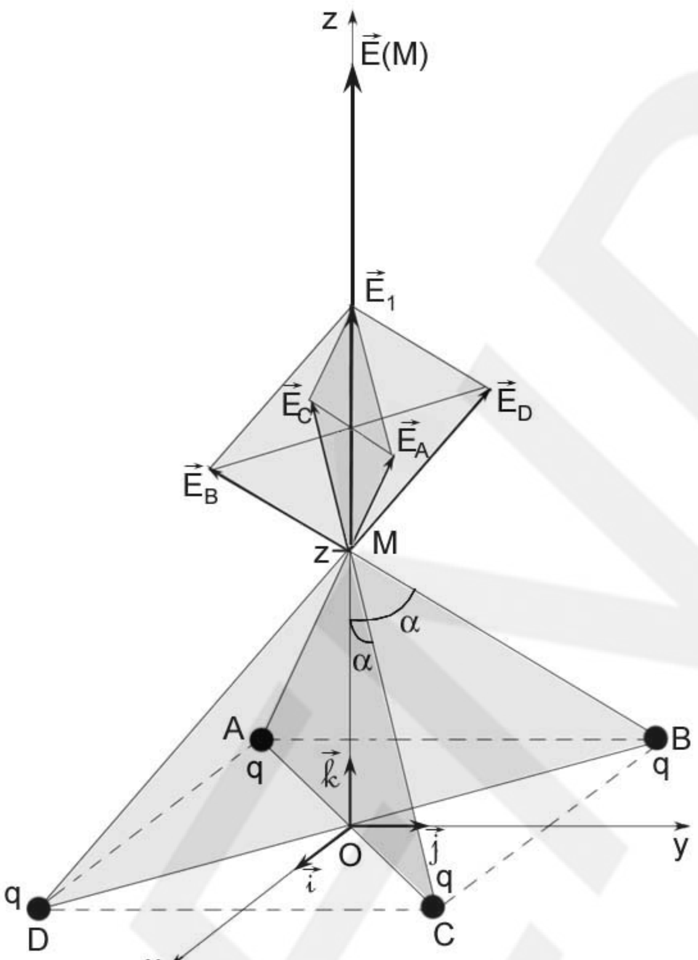
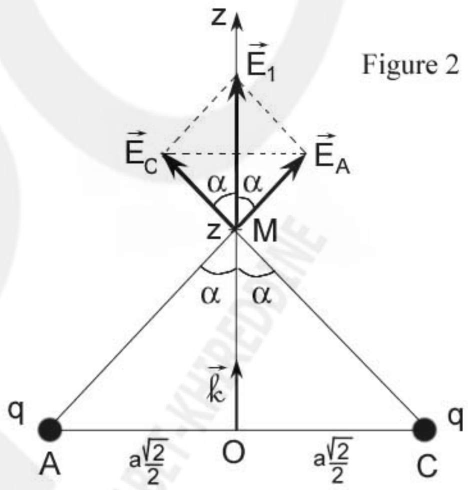
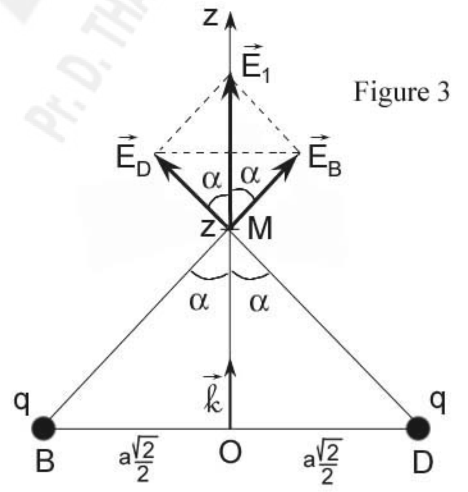


figure 1





$\vec{E}(M) = 2\vec{E}_1$

Géométriquement, on voit directement que : $\vec{E}_1 = 2\|\vec{E}_A\|\cos\alpha\vec{k}$ puisque $\vec{E}_A$ et $\vec{E}_C$ sont symétriques par rapport à l'axe Oz.

On note α l'angle entre MO et la droite joignant M et l'une des charges A, B, C ou D.

$\vec{E}(M) = 4\times\|\vec{E}_A\|\cos\alpha\vec{k}$

$$\vec{E}_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|^3} \Rightarrow \|\vec{E}_A\| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|} \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = z^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 == z^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{E}(M) = 4\times\left\|\vec{E}_A\right\|\cos\alpha\vec{k} = 4\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2}\times\cos\alpha\vec{k} = \frac{q}{\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2}\frac{z}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|} = \frac{qz}{\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^3}\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{\pi\varepsilon_o}\frac{qz}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}}\vec{k}$$

*Cas limites :

- z = 0 $\Rightarrow$ M au point O $\Rightarrow$ E(O) = 0

C'est normal car vu la symétrie par rapport au point O, les champs s'annulent deux à deux.

- z >> a $\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{\pi\varepsilon_o}\frac{qz}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}}\vec{k} = \frac{qz}{\pi\varepsilon_o}\frac{1}{z^3\left(1 + \frac{a^2}{2z^2}\right)^{3/2}}\vec{k} = \frac{q}{\pi\varepsilon_o z^2}\vec{k}$ car $\frac{a^2}{2z^2} << 1 \Rightarrow 1 + \frac{a^2}{2z^2} \approx 1$

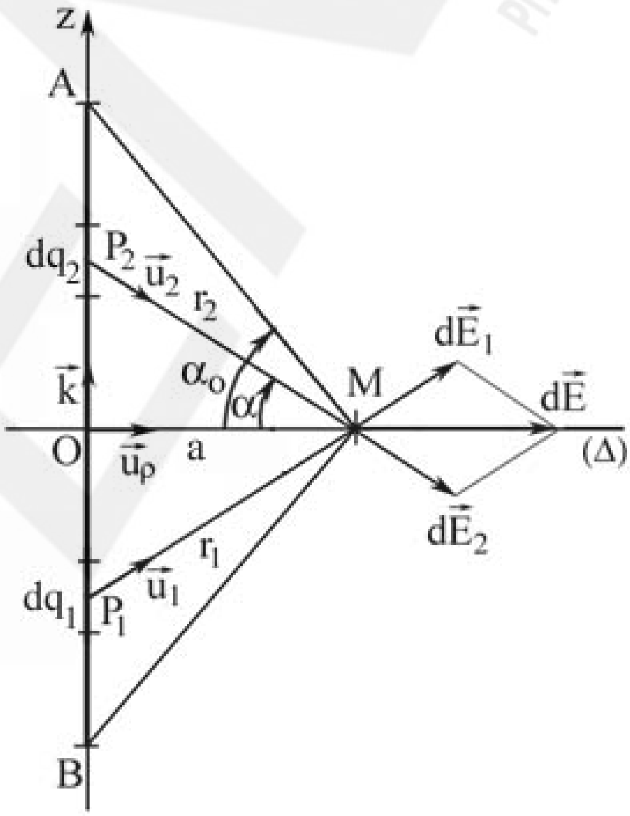
On remarque que ce champ est équivalent à celui créé en M par une charge Q = 4q centrée en O :

$$\vec{E}(M) = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_o z^2}\vec{k} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z^2}\vec{k}$$

Exercice 3 :

1/ On travaille en coordonnées cylindriques.

Par rapport à l'axe (Δ) du plan médian, chaque élément chargé dz sur OA possède un symétrique sur OB. Par conséquent, les champs élémentaires $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ en M créés par deux éléments de charges symétriques $dq_1(P_1)$ et $dq_2(P_2)$ sont symétriques par rapport à (Δ). Ces deux champs élémentaires sont égaux en module. Donc $d\vec{E}(M) = d\vec{E}_1(M) + d\vec{E}_2(M)$ est porté par (Δ).



- $\left\|d\vec{E}_1(M)\right\| = \left\|d\vec{E}_2(M)\right\|$

Où $d\vec{E}_1(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{dq_1}{r_1^2}\vec{u}_1$ et $d\vec{E}_2(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{dq_2}{r_2^2}\vec{u}_2$ avec $dq_1 = dq_2 = \lambda dz$ et $r_1 = r_2 = r$

- $d\vec{E}(M) = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2\left\|d\vec{E}_1\right\|\cos\alpha\,\vec{u}_\rho$

$$dE(M) = 2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\cos\alpha = 2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dz}{r^2}\cos\alpha$$

- Pour le calcul du champ total en M, intégrons l'expression de dE(M) par rapport à α de 0 à α_o (où α_o est la valeur maximale de α qui correspond à $z_A = L$:

$$dq = \lambda dz, \quad z = a\,tg\alpha, \quad dz = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha, \quad a = r\cos\alpha$$

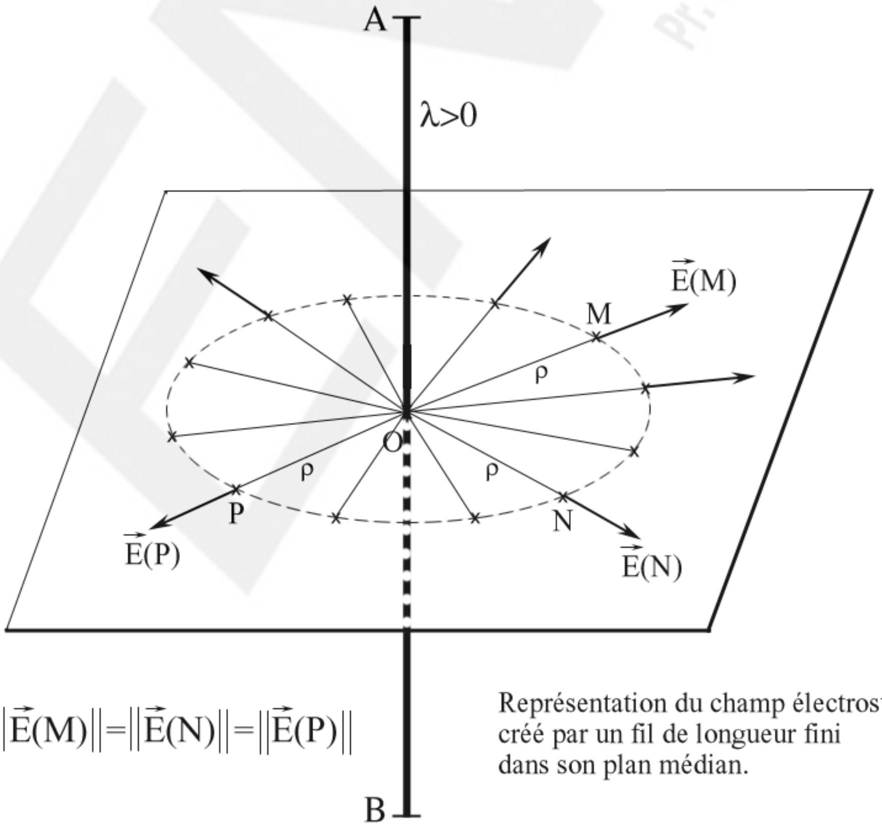
On ne garde que la variable α.

$$dE(M) = 2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\times\lambda\left(\frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha\right)\times\frac{1}{\left(\dfrac{a}{\cos\alpha}\right)^2}\times\cos\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}\cos\alpha d\alpha$$

$$\Rightarrow E(M) = \int_0^{\alpha_o}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}\cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}\sin\alpha_o$$

avec : $\sin\alpha_o = \dfrac{OA}{AM} = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$

$\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}\sin\alpha_o\,\vec{u}_\rho = \dfrac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_o a\sqrt{L^2 + a^2}}\vec{u}_\rho$: Le champ est radial dans le plan médian (voir figure).



Représentation du champ électrostatique
créé par un fil de longueur fini
dans son plan médian.

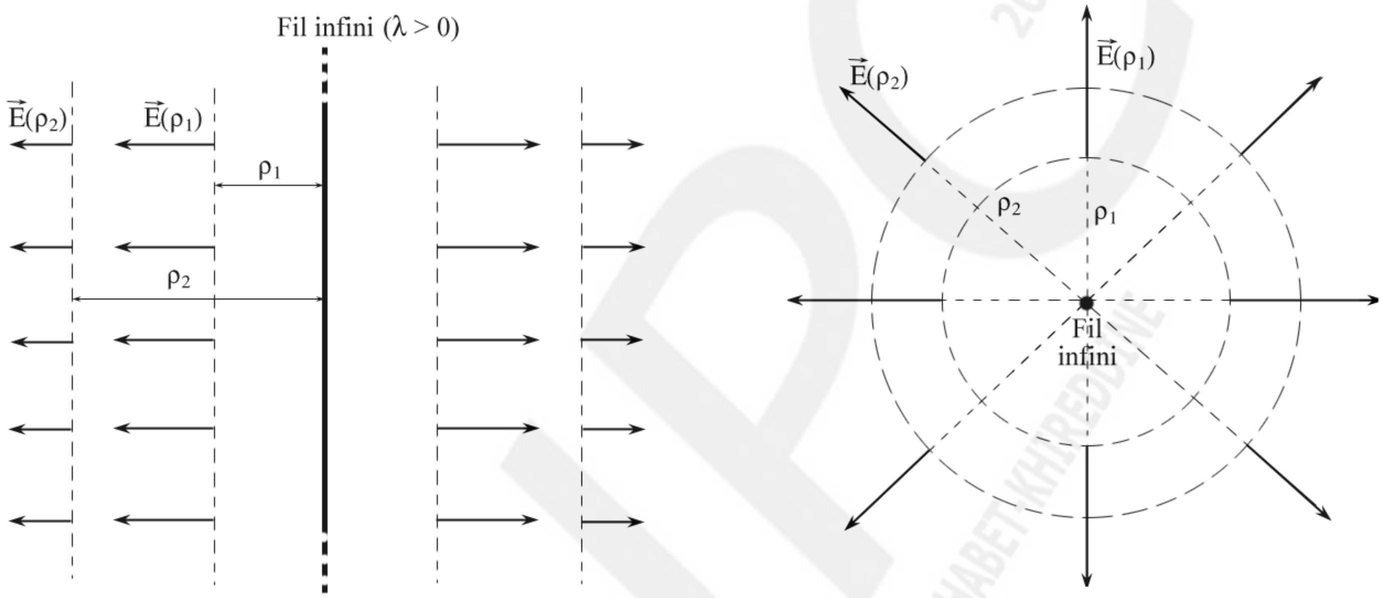
2/ Champ crée par un fil infini :

$$\lim_{L\to\infty}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}=\lim_{L\to\infty}\frac{L}{L\sqrt{1+\frac{a^2}{L^2}}}=1,\quad (\text{ou bien } \alpha_o \to \pi/2)$$

D'où : $\vec{E}(M)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\rho}\vec{u}_\rho$

Remarque :

Dans le cas du fil infini, tout plan perpendiculaire au fil est considéré comme un plan médian, et par conséquent, le champ $\vec{E}$ est partout radial.



Coupe longitudinale

Coupe transversale

3/ Calcul de V(M) :

L'élément $dq=\lambda dz$ crée un potentiel élémentaire : $dV=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{dq}{r}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\lambda dz}{\sqrt{a^2+z^2}}$.

D'où, vu la symétrie par rapport à (Δ) :

$$V(M)=2\times\int_0^L\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dz}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_0^L\frac{dz}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left[Ln(z+\sqrt{a^2+z^2})\right]_0^L.$$

Soit : $$\boxed{V(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}Ln\frac{L+\sqrt{a^2+L^2}}{a}}$$

Remarque :

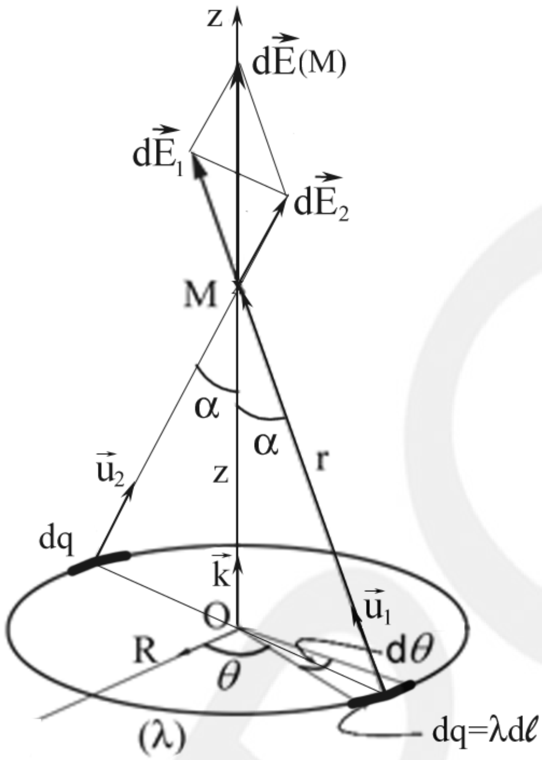
Ici, on intègre de 0 à L, donc $z\geq 0$, c'est pourquoi on peut ôter la valeur absolue de $(z+\sqrt{a^2+z^2})$.

EXERCICE 4 :

1/ **Calcul de V(z)**

*On considère UN seul élément dq et on intègre sur la totalité de la spire (θ varie de 0 à 2π).

*Ou bien on considère DEUX éléments dq symétriques par rapport à O et on intègre sur la moitié de la spire (θ varie de 0 à π).



L'élément dq crée un potentiel élémentaire :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda d\ell}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R d\theta}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

Attention ! Ici, la variable c'est θ (par laquelle on repère les éléments de charge dq), les quantités r et z sont fixées.

$$V(M) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R d\theta}{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R}{(R^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R}{(R^2+z^2)^{1/2}} \times 2\pi$$

$$V(z) = \frac{1}{2\varepsilon_o}\frac{\lambda R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

Calcul de E(z)

*Ici, la symétrie va nous servir à déterminer le sens de $d\vec{E}(M)$ créé par 2 éléments dq symétriques par rapport à O.

*Pour deux éléments dq symétriques par rapport à O, les composantes radiales de $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ (perpendiculaires à l'axe Oz) s'annulent : $d\vec{E}(M) = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ est donc porté par Oz suivant $\vec{k}$: $d\vec{E} = 2\left\|d\vec{E}_1\right\|\cos\alpha\,\vec{k}$.

$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_1$ et $d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_2$ avec $\left\|d\vec{E}_1\right\| = \left\|d\vec{E}_2\right\|$

$$dE = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R d\theta}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R z d\theta}{r^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda R z d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

avec $\cos\alpha = \frac{z}{r}$ et $r = \sqrt{R^2+z^2}$. (ceux sont des quantités fixées)

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\times\pi = \frac{1}{2\varepsilon_o}\frac{\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

2/ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V$

$$\vec{E} = E\vec{k} = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

<u>Démonstration</u> :

Exprimons $\overrightarrow{\text{Grad}}V$ en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} dV = -\vec{E}.d\vec{r} = -(E_r dr + r d\theta E_\theta + dz E_z) \\ dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}dr + \dfrac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \dfrac{\partial V}{\partial z}dz \end{cases} \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r},\quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Comme $\vec{E}$ ne dépend pas de r et de θ, alors, on a : $\vec{E}(z) = -\dfrac{dV}{dz}\vec{k}$

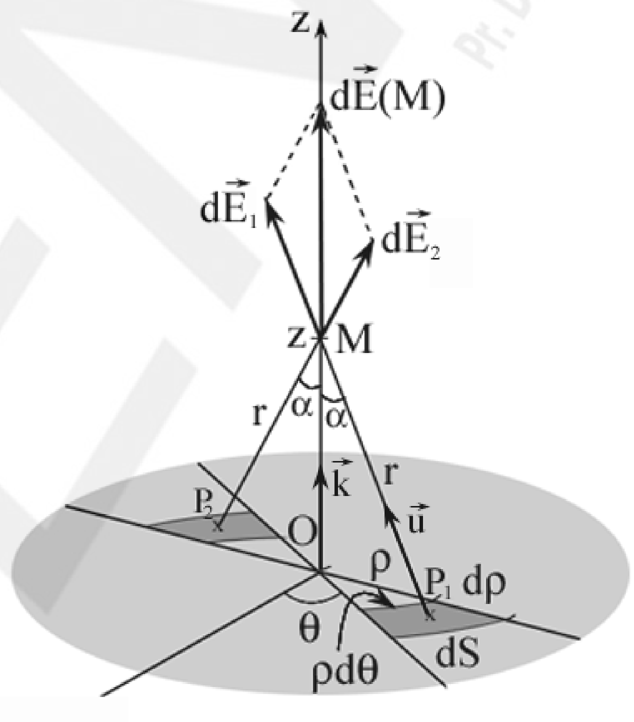
Attention ! le « r » sur la figure n'est pas celui des coordonnées cylindriques !

Vérifions que l'on a bien : $E(z) = -\dfrac{dV}{dz}$

$$-\frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2\varepsilon_o}\frac{\lambda R}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right\} = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\times(2z)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(R^2+z^2)^{-3/2} = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}} = E(z)$$

On a bien : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V$

<u>Exercice 5</u> :



1/ a/ Champ $\vec{E}(M)$:

*On travaille dans le repère cylindrique.

*On étudie la symétrie par rapport à Oz pour connaître le sens de $d\vec{E}(M)$.

*σ étant constante, par raison de symétrie, 2 éléments $dq = \sigma dS$ placés aux points P_1 et P_2, symétriques par rapport à Oz, donnent respectivement en M(z) des champs élémentaires $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ dont la résultante élémentaire est un champ $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ porté par l'axe Oz : $d\vec{E}(M) = dE(M)\vec{k}$. A noter dès maintenant que le champ total $\vec{E}(M)$ sera alors obtenu en n'intégrant que sur la surface d'un demi demi-cercle chargé.

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u} \quad \text{avec } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2\left\|d\vec{E}'\right\|\cos\alpha\vec{k}, \quad \text{avec } \alpha \text{ angle entre Oz et } \overrightarrow{P_1M}.$$

$$dE = 2\times\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_o r^2}\times\cos\alpha = 2\times\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}\times\cos\alpha$$

($dS = \rho d\rho d\theta$ en coordonnées polaires sur le plan du cercle)

$$\cos\alpha = \frac{z}{r}, \quad r = \sqrt{z^2+\rho^2}, \quad z \text{ fixe}$$

$$\Rightarrow dE = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\rho d\rho d\theta}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} \Rightarrow E(M) = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_o}\int_0^\pi d\theta\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_o}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Calcul de l'intégrale : $\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$

Faisons le changement de variable suivant : $U = z^2+\rho^2 \Rightarrow dU = 2\rho d\rho$

Concernant les bornes de l'intégrale : $\begin{cases}\rho = 0 \Rightarrow U = z^2\\ \rho = R \Rightarrow U = z^2+R^2\end{cases}$

$$\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{dU}{2U^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{z^2}^{z^2+R^2}U^{-3/2}dU = -\left[\frac{1}{\sqrt{U}}\right]_{z^2}^{z^2+R^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$E(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

D'où le résultat final :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} z > 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k} \\ z < 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}\end{cases}$$

b/ Calcul de V(M) :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V$$

$$\begin{cases}\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V \\ \vec{E} = E\vec{k} \\ \overrightarrow{\text{Grad}}V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \dfrac{dV}{dz}\vec{k}\end{cases} \qquad \Rightarrow E(z) = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow V(z) = -\int E(z)dz + C$$

On a remplacé la dérivée partielle (∂) par une dérivée entière (d « droit ») car V ne dépend que de z.

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz + C = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int\left(\pm 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz + C$$

$$V(z) = \mp\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}z + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}dz + C$$

Changement de variable : $U = z^2 + R^2 \Rightarrow dU = 2zdz$

$$\int\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}dz = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{U}}dU = \sqrt{U} = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$V(z) = \mp\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}z + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\sqrt{z^2+R^2} + C\begin{cases} z > 0 \Rightarrow V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(-z + \sqrt{z^2+R^2}\right) + C \\ z < 0 \Rightarrow V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(z + \sqrt{z^2+R^2}\right) + C \end{cases}$$

On suppose qu'il n'a pas de charge à l'infini, donc pour les z > 0, on a $V(z \to +\infty) = 0$.

$$V(z \to +\infty) = \lim_{z\to+\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(-z + \sqrt{z^2+R^2}\right) + C = \lim_{z\to+\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)\left(\sqrt{z^2+R^2} + z\right)}{\sqrt{z^2+R^2} + z} + C = 0$$

$$V(z \to +\infty) = \lim_{z\to+\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{R^2}{\sqrt{z^2+R^2} + z} + C = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

De même pour $V(z \to -\infty)$.

Le résultat final est alors :

$$\begin{cases} z > 0 \Rightarrow V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(-z + \sqrt{z^2+R^2}\right) \\ z < 0 \Rightarrow V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(z + \sqrt{z^2+R^2}\right) \end{cases}$$

2/ a/ $\vec{E}(M)$ pour un plan infini :

Il suffit de faire $R \to +\infty$.

Alors, z étant fixé, $\lim_{R\to+\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = 0$, donc :

$$\begin{cases} z > 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{k} \\ z < 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{k} \end{cases}$$

b/ Calcul de V(M) :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V \Rightarrow E(z) = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow V(z) = -\int E(z)dz + C = -\int \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}dz + C$$

$$V(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_o} + C$$

V (z = 0) = 0, donc C = 0.

D'où : $$V(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_o}$$

<u>Exercice 6</u> :

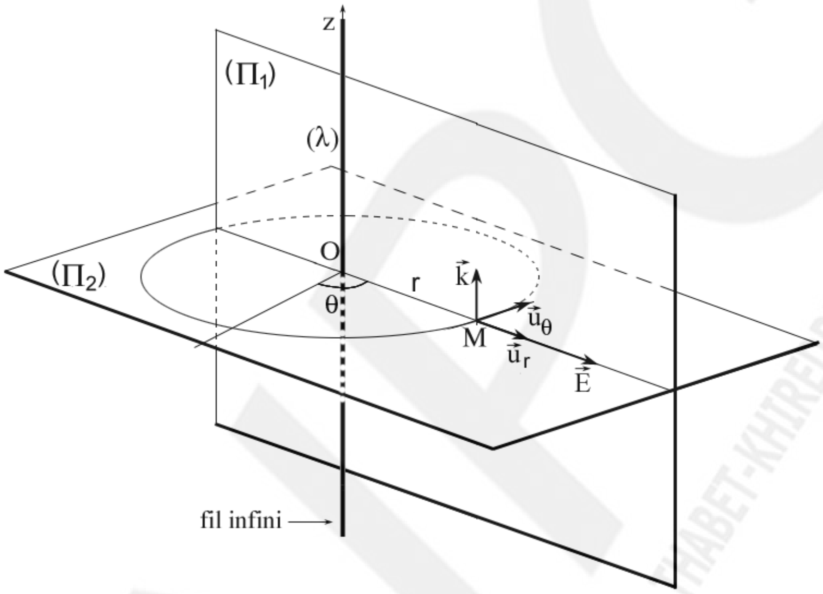
1/ Calcul de $\vec{E}$:

a/ <u>Choix du repère</u> : repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

Soit un point M de l'espace de coordonnées $M(r,\theta,z)$. Calculons le champ $\vec{E}(M)$.

D'une manière générale, on a : $$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{k}$$

b/ <u>Etude des symétries en appliquant le principe de Curie</u> :



* Le fil étant infini :

-Le plan $\Pi_1(M,\vec{u}_r,\vec{k})$ est un plan de symétrie <u>pour la distribution de charges</u>, alors $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan d'après le principe de Curie.

-Le plan $\Pi_2(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie <u>pour la distribution de charges</u>, alors $\vec{E}$ appartient à ce plan d'après le principe de Curie.

Par conséquent, le champ $\vec{E}(M)$ appartenant simultanément à ces deux plans, il ne peut appartenir qu'à leur intersection, soit la droite portant le vecteur $\vec{u}_r$. Donc, $\vec{E}(M)$ est dirigée selon $\vec{u}_r$:

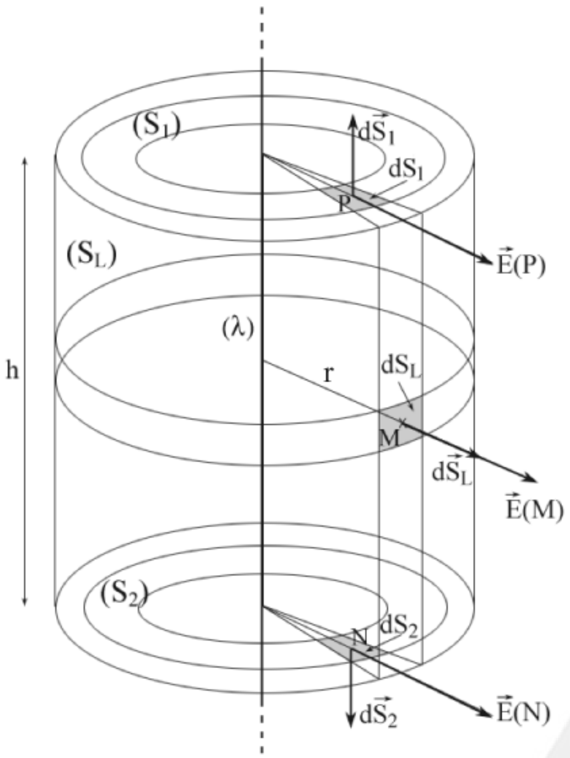
$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{u}_r.$$

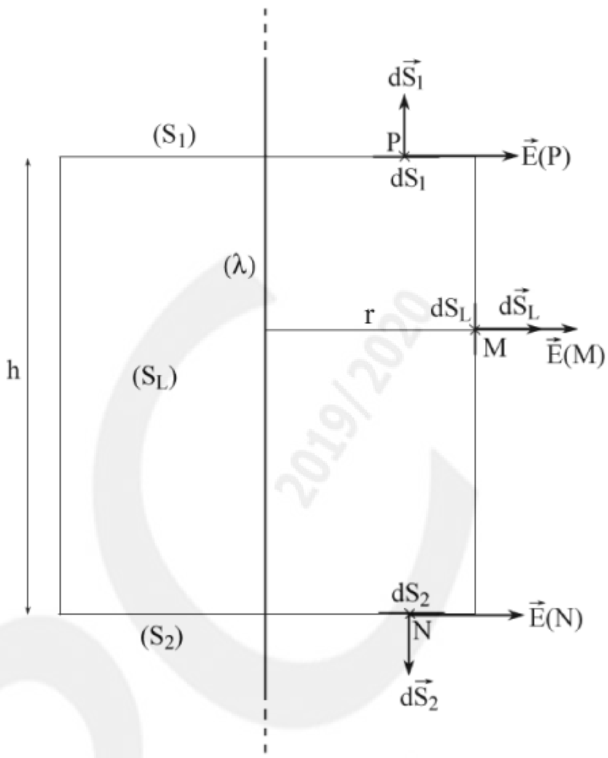
* De plus, la densité linéique de charges λ étant constante, alors la distribution de charges est invariante :

- Par translation le long de l'axe Oz $\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de z.
- Par rotation autour de l'axe Oz $\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de θ.

  Donc le champ $\vec{E}$ est radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$





c/ Choix de la surface de Gauss : L'étude des symétries faite précédemment a montré que le champ $\vec{E}(M)$ ne dépendait que de r, c'est-à-dire de la distance entre le point M et l'axe du fil infini et que $\vec{E}$ était dirigé selon $\vec{u}_r$. Donc, sur une surface cylindrique de rayon r, le champ est le même en intensité. Aussi, prenons-nous comme surface de Gauss (S_G) un cylindre de rayon r et de hauteur h passant par M. Cette surface fermée est constituée de deux surfaces circulaires (S_1) et (S_2) et de la surface latérale (S_L) :

$$(S_G) = (S_1) + (S_2) + (S_L)$$

d/ Appliquons le théorème de Gauss, c'est-à-dire calculons le flux de $\vec{E}$ créé <u>par toute la distribution de charge (le fil infini)</u> à travers la surface de Gauss (S_G) :

$\phi_{(S_G)} = \oint\!\!\oint_{(S_G)} \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E}(P).d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}(N).d\vec{S}_2 + \iint_{(S_l)} \vec{E}(M).d\vec{S}_L = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$. Q_{int} représente la charge localisée à l'intérieur de la surface de Gauss considérée.

$\vec{E}(P)$, $\vec{E}(N)$ et $\vec{E}(M)$ sont tous perpendiculaires au fil. De la figure, nous déduisons que $\vec{E}(P).d\vec{S}_1 = 0$, $\vec{E}(N).d\vec{S}_2 = 0$ et $\vec{E}(M).d\vec{S}_L = E(M)\vec{u}_r.dS_L\vec{u}_r = E(M)dS_L$.

Le flux à travers (S_G) se réduit donc à : $\phi_{(S_G)} = \iint_{(S_L)} E(M)dS_L = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$. Comme E(M) est constant sur toute la surface latérale du cylindre, on peut le faire sortir de l'intégrale :

$\phi_{(S_G)} = E(M)\iint_{(S_L)} dS_L = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$.

Soit : $E(M)\times 2\pi rh = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_o}$.

Ce qui implique que : $E(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$ et $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\vec{u}_r$

2/ Calcul du potentiel électrostatique V

La distribution de charges est invariante par rotation autour de Oz et par translation le long de Oz, donc le potentiel ne dépend que de r : V=V(r).

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}}V$ avec $\overrightarrow{\text{Grad}}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$ en coordonnées cylindriques. Mais comme V ne dépend que de r, on a : $\overrightarrow{\text{Grad}}V = \dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$, d'où : $E(r) = -\dfrac{dV}{dr}$.

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}dr \Rightarrow V = \int -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}dr + C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\text{Ln}r + C$$

Dans ce cas, la constante C est indéterminée. On ne peut pas poser que V=0 à l'infini $(r \to +\infty)$ car la charge n'est pas nulle à l'infini.

On suppose que V est connu à une position r_o : $V(r_o) = V_o$:

$$V(r_o) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\text{Ln}r_o + C = V_o \Rightarrow C = V_o + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\text{Ln}r_o$$

D'où : $$V(r) = V_o - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\text{Ln}\frac{r}{r_o}$$

Exercice 7 :

* Calcul du champ électrostatique :

a/ Etude de la symétrie de la distribution de charges pour déterminer le sens du champ $\vec{E}$ en un point M :

D'après le principe de Curie, si la distribution présente une symétrie par rapport à un plan passant par M, alors le champ $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan.

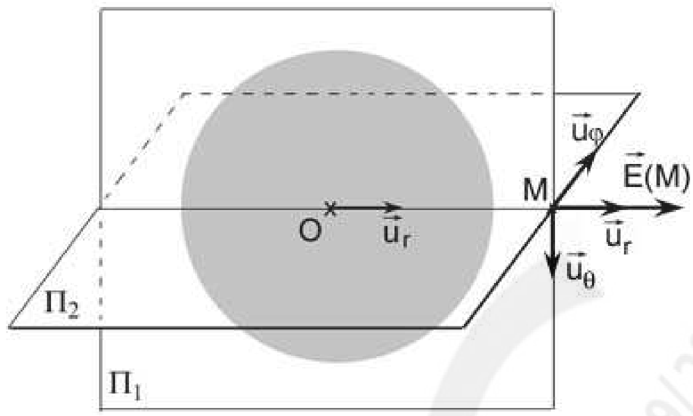
En coordonnées sphériques (r,θ,φ) :

Deux plans de symétrie de charges :

- Π_1 : passant par un diamètre et contenant M, c'est le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$, par exemple.
- Π_2 : passant par un diamètre et contenant M, c'est le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$, par exemple.

L'intersection de ces deux plans donne la direction de $\vec{E}(M)$.

Donc $\vec{E}(M)$ est radial : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$

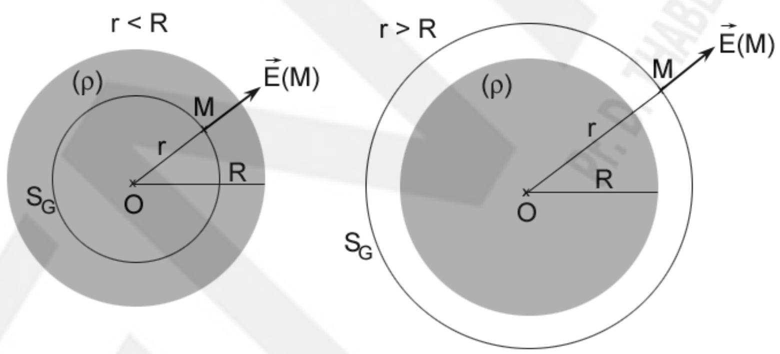


b/ Etude de l'invariance de la distribution de charges pour déterminer les variables dont dépend $\vec{E}(M)$ ***:***

La densité de charges étant constante, la distribution est invariante par rotation autour de O (symétrie sphérique) donc ne dépend ni de θ ni de φ. Donc, d'après le principe le Curie, le champ ne dépendra pas également de θ et de φ : E ne va dépendre que de r et l'on a : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

c/ Choix de la surface de Gauss :

D'après ce qui précède, pour un r donné, l'intensité du champ sera constante pour tous les points d'une sphère de rayon r. Par conséquent, la surface de Gauss sera une sphère passant par le point M où l'on calcule le champ.



* **Pour r < R :**

Surface de Gauss : sphère (S_G) de rayon r passant par M.

$$\phi_{S_G} = \oint\!\!\oint_{S_G} \vec{E}_I.d\vec{S} = E_I S_G = E_1(M)\times 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho V}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \mathbf{E_1(M)} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{3\varepsilon_o}}\mathbf{r}$$

* **Pour r > R :**

Surface de Gauss : sphère (S_G) de rayon r passant par M.

$$\phi_{S_G} = \oint\!\!\oint_{S_G} \vec{E}_{II}.d\vec{S} = E_{II} S_G = E_{II}(M)\times 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho V}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \mathbf{E_{1I}(M)} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{3\varepsilon_o}}\frac{\mathbf{R^3}}{\mathbf{r^2}}$$

<u>Remarque</u> : Il y a continuité du champ pour $r = R$:

$$E_I(R) = E_{II}(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o R^2}$$

* <u>Calcul du potentiel électrostatique</u> :

r < R : $dV_I = -E_I dr \Rightarrow V_I = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} dr + C_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} + C_1$

r > R : $dV_{II} = -E_{II} dr \Rightarrow V_{II} = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2} dr + C_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r} + C_2$

Pas de charges à l'infini, on peut prendre : $V_{II}(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

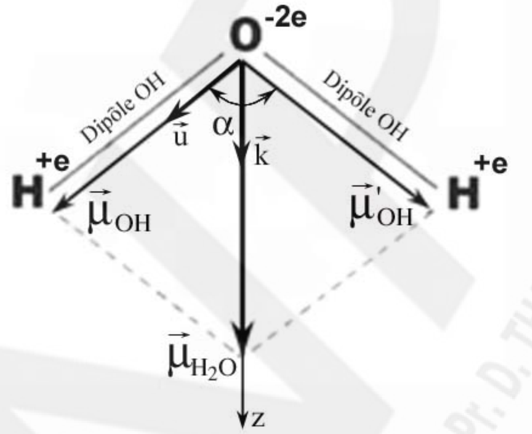
D'où : $V_{II}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r}$

Recherche de C_1 :

On a continuité du potentiel pour r = R, donc : $V_I(R) = V_{II}(R) \Rightarrow \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o R} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_o} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}$

D'où : $V_I(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} + \frac{\varepsilon R^2}{2\varepsilon_o}$

<u>Exercice 8</u> :



La molécule H_2O est symétrique par rapport à l'axe Oz de vecteur unitaire $\vec{k}$. Le moment dipolaire de la molécule d'eau est :

$\vec{\mu}_{H_2O} = 2\|\vec{\mu}_{OH}\| \cos\alpha \vec{k}$

$\vec{\mu}_{OH} = ed\vec{u}$

$\vec{\mu}_{H_2O} = 2ed\cos\alpha\vec{k}$

Application numérique :

e = $1,60.10^{-19}$ C, d = 0,952 Å = 0,952 10^{-10}m, α = 104,45' = 104,75°.

$\mu_{H_2O} = 2ed\cos\alpha = 2 \times 1,60.10^{-19} \times 0,952.10^{-10} \cos 52,375° = 1,86.10^{-29}$ C.m

$1\,C.m \approx 3.10^{29} D \Rightarrow \mu_{H_2O} = 5,58D$

<u>Remarque</u> :

La molécule CO_2 n'est pas polarisée car c'est une molécule linéaire : les deux moments dipolaires $\vec{\mu}_{C-O}$ s'annulent d'où $\vec{\mu}_{CO_2} = \vec{0}$ (C'est une molécule « apolaire »).