

Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } B\}$ le rayon spectral de B . On a le théorème suivant :

Théorème 6.3. La suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque} \\ X^{(k+1)} = B X^{(k)} + M^{-1}b, \end{cases}$$

converge vers X^* si et seulement si $\rho(B) < 1$.

Condition suffisante de convergence

Rappel

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, les normes définies par :

$$- \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$- \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

sont équivalentes.

2. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, les normes définies par :

$$- \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$

$$- \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$- \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

sont équivalentes.

Lemme 6.1. (Relation entre $\rho(B)$ et $\|B\|_t$)

$$\rho(B) \leq \|B\|_t \quad (t = 1 \vee 2 \vee \infty).$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de B , alors $\exists X \in (\mathbb{R}^n)^n : BX = \lambda X$ et donc

$$\|BX\|_t = \|\lambda X\|_t \implies |\lambda| \|X\|_t \leq \|B\|_t \|X\|_t, \quad X \in (\mathbb{R}^n)^n \quad (\|BX\|_t \leq \|B\|_t \|X\|_t).$$

D'où, $|\lambda| \leq \|B\|_t \implies \rho(B) \leq \|B\|_t, \quad t = 1 \vee 2 \vee \infty.$ □

D'après le lemme 6.1, on tire que l'existence d'une norme $\|\cdot\|_t, \quad (t = 1 \vee 2 \vee \infty)$ de B qui vérifie $\|B\|_t < 1$ est une condition suffisante pour la convergence de la méthode itérative.

6.3.2 Principales méthodes itératives

On considère la décomposition suivante de la matrice A

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ -E & D & \end{pmatrix}$$

où,

$$\begin{cases} D & : \text{ la diagonale de } A, \\ -E & : \text{ la partie au dessous de la diagonale de } A, \\ -F & : \text{ la partie au dessus de la diagonale de } A. \end{cases}$$

Exemple 6.5. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\forall i = 1, 2, \dots, n, a_{ii} \neq 0_{\mathbb{R}}$ (on peut s'y ramener si A est inversible).

I) Méthode de Jacobi : $M = D, \quad N = E + F$

II) Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E, \quad N = F$

III) Méthode de relaxation : $M = (\frac{1}{\omega})D - E, \quad N = (\frac{1}{\omega} - 1)D + F, \quad \omega \in \mathbb{R}^*.$

Remarque 6.11.

1. Si $\omega = 1$, la méthode de relaxation coïncide avec celle de Gauss-Seidel.
2. La matrice M est inversible, car elle possède toujours les a_{ii} sur la diagonale.
3. La méthode de relaxation est une variante qui généralise la méthode de Gauss-Seidel. L'introduction du paramètre ω vise à accélérer la convergence de celle dernière.

Présentation des algorithmes

On va, dans ce qui suit, expliciter les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, et cela sur un système linéaire à trois équations ($n = 3$).

Soit donc $AX = b$ où $A \in M_3(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^3$

$$AX = b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

les $(a_{ii})_{i=1,2,3}$ étant supposés non nuls ; tirons x_1 de (1), x_2 de (2) et x_3 de (3), on obtient

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3)/a_{11} = f(x_2, x_3) \quad (4)$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 + a_{23}x_3)/a_{22} = g(x_1, x_3) \quad (5)$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 + a_{32}x_2)/a_{33} = h(x_1, x_2) \quad (6)$$

soit $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

La méthode de Jacobi revient au processus itératif suivant :

1^{ère} étape :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = g(x_1^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = h(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2^{ème} étape :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = g(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt. (Il est évident qu'on ne peut pas calculer le coût de la méthode).

La méthode de Gauss-Seidel² revient au processus itératif suivant :

1^{ère} étape :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = \text{Jacobi} \\ x_2^{(1)} &= g(x_1^{(1)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} &= h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{aligned} \quad \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2^{ème} étape :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} &= g(x_1^{(2)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} &= h(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{aligned} \quad \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

(c'est à dire toutes les composantes calculées $(x_2, x_3, \dots, x_{i-1})$ sont utilisées pour calculer x_i , et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt.

Généralisation

Soit $AX = b$ un système linéaire d'ordre n où $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Les équations (4), (5) et (6) précédentes se généralisent comme suit :

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Étapes principales de la méthode de Jacobi :

1. Étant données $A, b, X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$, ϵ (la précision) et/ou $KMax$ (le nombre maximal d'itérations).

2. $x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$

A répéter pour $k = 0, \dots, KMax$.

Si

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations, et $X^{(k+1)}$ est une solution approchée de X solution du système donné avec une précision relative ϵ .

Étapes principales de la méthode de Gauss-Seidel :

1. Étant données $A, b, X^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}^t, \epsilon$ et/ou $KMax$.

2. $x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$

A répéter pour $k = 0, \dots, KMax$.

Si

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

arrêter les itérations, et $X^{(k+1)}$ est une solution approchée de X solution du système donné avec une précision relative ϵ .

Remarque 6.12. 1. S'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i_0 i_0} = 0$, on procède à une permutation de ligne sur A (et sur b).

2. En général, la convergence de l'une de ces méthodes n'implique pas la convergence de l'autre.

3. Plus que $\rho(B) < 1$, plus que la convergence du processus itératif

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C \end{cases}$$

vers la solution exacte du système $AX = b$ est plus rapide.

Exemple 6.6. Soient les quatre systèmes linéaires $A_i X = b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées à chaque système, pour tout choix de $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, en utilisant le rayon spectral des matrices d'itérations. Conclure.

Réponse. On trouve les résultats suivants :

1.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_1) = 0 < 1$, $\rho(G_1) = 2 > 1$, d'où la méthode de Jacobi converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, alors que celle de Gauss-Seidel ne converge pas $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2.

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_2) = 1,118 > 1$, $\rho(G_2) = \frac{1}{2} < 1$, d'où la méthode de Gauss-Seidel converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, alors que celle de Jacobi ne converge pas $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

3.

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_3) = 0,44 < 1$, $\rho(G_3) = 0,018 < 1$, d'où les deux méthodes convergent $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, mais comme $\rho(G_3) < \rho(J_3)$ alors, la méthode qui converge plus rapidement est celle de Gauss-Seidel.

4.

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{11} & -\frac{9}{11} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & 0 \end{pmatrix} \quad G_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{11} & -\frac{9}{11} \\ 0 & \frac{36}{11} & \frac{64}{11} \\ 0 & -\frac{26}{11} & -\frac{128}{11} \end{pmatrix}$$

avec $\rho(J_4) = 0,64 < 1$, $\rho(G_4) = 0,77 < 1$, d'où les deux méthodes convergent $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, mais comme $\rho(J_4) < \rho(G_4)$ alors, la méthode qui converge plus rapidement est celle de Jacobi.

D'autres conditions suffisantes de convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Soit le système linéaire $AX = b$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, J la matrice d'itération de Jacobi définie par :

$$J = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{où} \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j; \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On a vu qu'une condition suffisante pour que le processus itératif converge (vers la solution du système (S)) est que $\|J\|_N$ où N est l'une des trois normes matricielles précédentes.

Preons la norme $\|\cdot\|_\infty$: $\|J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right)$, alors

$$\|J\|_\infty < 1 \iff \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

et pour i fixé, on a

$$(|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{in}|) < 1$$

ou encore

$$\frac{1}{a_{ii}} (|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{in}|) < 1 \iff \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{ij}| < |a_{ii}|$$

auquel cas on dit que la matrice A est à diagonale dominante stricte.

Remarque 6.13. On aboutit à la même conclusion pour la méthode de Gauss-Seidel (casée).

D'où le résultat suivant :

Théorème 6.4. Pour que les processus itératifs de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ($\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$), il suffit que la matrice A du système $AX = b$ soit à diagonale dominante stricte (D.D.S).

Proposition 6.1. Si A est symétrique définie positive, alors le processus itératif de Gauss-Seidel converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Méthode de relaxation

La matrice d'itération est dans ce cas $B = M^{-1}N$ où $M = (\frac{1}{\omega})D - E$, $N = (\frac{1-\omega}{\omega})D + F$, avec ω un paramètre dans \mathbb{R}^+ .

On remarque que si $\omega = 1$, cette méthode coïncide avec celle de Gauss-Seidel; on l'utilise pour accélérer la convergence de Gauss-Seidel :

$$\begin{aligned} \omega > 1 & \quad \text{procédé de sur-relaxation,} \\ \omega = 1 & \quad \text{méthode de Gauss-Seidel,} \\ \omega < 1 & \quad \text{procédé de sous-relaxation.} \end{aligned}$$

En écrivant le processus itératif :

$$X^{(k+1)} = (M^{-1}N)X^{(k)} + M^{-1}b,$$

alors la méthode de relaxation consiste en le schéma suivant :

lors du passage de $X^{(k)}$ à $X^{(k+1)}$ on ne retient pas $X^{(k+1)}$ pour la suite, mais $\omega X^{(k+1)} + (1-\omega)X^{(k)}$. Autrement dit

$$X^{(k+1)} \longleftarrow X^{(k)} + \underbrace{\omega}_{\omega-S} (X^{(k+1)} - X^{(k)}),$$

et en injectant cette expression dans l'algorithme de Gauss-Seidel, on trouve l'algorithme suivant :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Convergence de la méthode de relaxation

Théorème 6.5. (conditions sur le paramètre ω)

Cas d'une matrice A quelconque (mais inversible), une condition nécessaire pour que la méthode de relaxation converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ est que $\omega \in]0, 2[$.

Si A est à diagonale dominante stricte, alors la condition suffisante de convergence est que $\omega \in]0, 1[$.

Si A est symétrique définie positive, alors la condition nécessaire et suffisante de convergence est que $\omega \in]0, 2[$.