SOMMAIRE

CHAPITRE V- Mouvement de rotation

V- Mouvement de rotation

INTRODUCTION

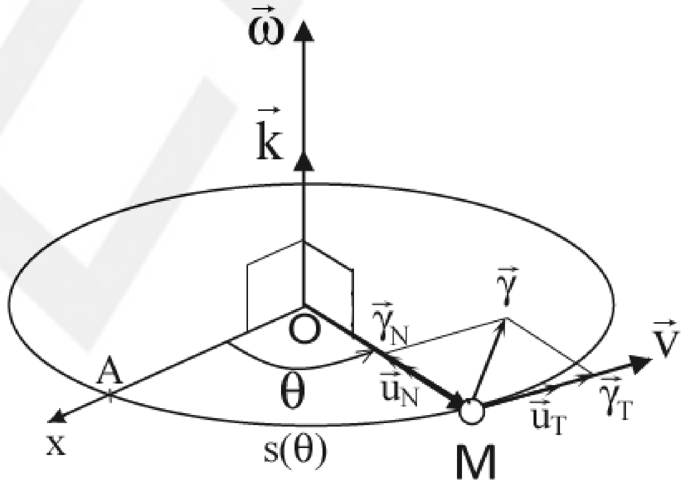
Dans les chapitres précédents nous avions étudié la mécanique du point matériel, c'est-à-dire un corps sans dimension. On ne pouvait envisager qu'un mouvement de translation rectiligne ou curviligne d'une manière générale du point matériel. Le mouvement de rotation autour d'un axe passant par ce point n'a pas de sens, cependant, il peut tourner autour d'un autre axe. Dans ce chapitre, nous allons étudier la mécanique des corps solides indéformables en rotation. On considérera particulièrement les rotations autour d'un axe fixe passant par un point du solide et ce par rapport à un repère galiléen. Le corps solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe peut être considéré comme un ensemble de points matériels (ou plus exactement d'éléments infinitésimaux de masse *dm*) décrivant des cercles de rayons différents autour de l'axe. L'étude cinématique, dynamique et énergétique réalisée sur le point matériel peut à nouveau être considérée et les grandeurs définies pourront être obtenues par sommation (ou intégration) dans le cas du solide en rotation.

V.1- CINEMATIQUE DE ROTATION

V.1.1- CINEMATIQUE DE ROTATION DU POINT MATERIEL

Dans le chapitre II.9, page 33, nous avions abordé l'étude cinématique du mouvement de rotation circulaire du point matériel et défini un certain nombre de grandeurs cinématiques.

Considérons un point matériel M décrivant un cercle de centre O et de rayon R.



*L'arc $\overset{\frown}{AM}$ représente l'abscisse curviligne de M : $s(M)=s(\theta)=R\theta$.

*Le vecteur vitesse linéaire $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

*Le module du vecteur vitesse est : $v=\dfrac{ds}{dt}=R\dot{\theta}$

*La vitesse angulaire du point M autour de O est : $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$.

*Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est porté par l'axe perpendiculaire au plan de rotation du point matériel et son sens est donné par la «règle du tournevis » : $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{k}$.

*La relation vectorielle reliant le vecteur vitesse linéaire $\vec{v}$ et le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est : $\vec{v}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.

*L'accélération linéaire du point M est : $\vec{\gamma}=\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}$.

* Le vecteur accélération angulaire est : $\vec{\alpha}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}=\dot{\vec{\omega}}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k}=\ddot{\theta}\vec{k}$.

*L'accélération tangentielle est : $\gamma_T=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dR\dot{\theta}}{dt}=R\dfrac{d\dot{\theta}}{dt}=R\alpha$

*L'accélération normale (ou accélération centripète) est : $\gamma_N=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(R\dot{\theta})^2}{R}=R\omega^2$.

<u>Dans le cas du mouvement circulaire uniformément varié</u>, on peut établir des relations analogues au cas du mouvement rectiligne uniformément varié :

1/ Equation horaire du mouvement de M dans le cas d'un mouvement circulaire uniformément varié (accélération angulaire α constante) avec pour condition initiale : à t = 0, $\theta=\theta_o$ et $\omega=\omega_o$.

$$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow \boldsymbol{\omega=\alpha t+\omega_o}$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\alpha t+\omega_o\Rightarrow \boldsymbol{\theta(t)=\frac{1}{2}\alpha t^2+\omega_o t+\theta_o}$$

2/ Relation entre θ, ω et α :

$$t=\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}\alpha\frac{(\omega-\omega_o)^2}{\alpha^2}+\omega_o\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}+\theta_o\Rightarrow\theta-\theta_o=\frac{1}{2}\frac{\omega^2+\omega_o^2-2\omega\omega_o}{\alpha}+2\omega_o\frac{\omega-\omega_o}{2\alpha}$$

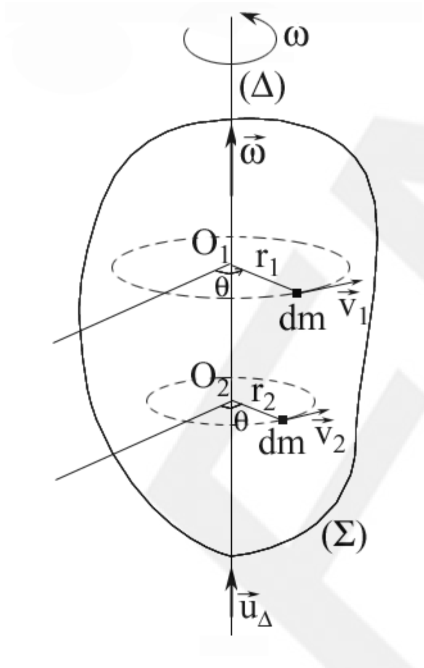
$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega^2-\omega_o^2=2\alpha(\theta-\theta_o)}$$

Conclusion : Correspondances entre les grandeurs linéaires et les grandeurs angulaires :

Mouvement rectiligne uniformément varié	unité	**Mouvement circulaire uniformément varié**	unité
Position : x	m	Position : θ	rd
Vitesse linéaire : $v=\frac{dx}{dt}$	m/s	Vitesse angulaire : $\omega=\frac{d\theta}{dt}$	rd/s
Accélération linéaire : $\gamma=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$	m/s^2	Accélération angulaire : $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$	rd/s^2
$v(t)=\gamma t+v_o$	m/s	$\omega(t)=\alpha t+\omega_o$	rd/s
$x(t)=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_o t+x_o$	m	$\theta(t)=\frac{1}{2}\alpha t^2+\omega_o t+\theta_o$	rd
$v^2-v_o^2=2\gamma(x-x_o)$	-	$\omega^2-\omega_o^2=2\alpha(\theta-\theta_o)$	-

V.1.2- CINEMATIQUE DE ROTATION DU SOLIDE

Considérons, dans un repère galiléen, un solide indéformable quelconque (Σ) en rotation autour d'un axe fixe (Δ). On parle alors de ***rotation pure***.



a/ Les points du solide :

* Tous les points du solide tournent avec la même vitesse angulaire ω autour de cet axe.

* Ils ont tous des trajectoires circulaires centrées sur l'axe, mais de rayons différents. Les plans de ces trajectoires sont tous perpendiculaires à l'axe de rotation (Δ). En conséquence, tout ce qui a été établi précédemment pour un point matériel est valable pour un point quelconque du solide :

- le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, commun à tous les points du solide, est porté par l'axe (Δ) : $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{u}_\Delta$ avec $\vec{u}_\Delta$ le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

- la vitesse linéaire de chaque point du solide est donnée par : $v=r\omega$ où r est la distance du point M du solide à l'axe (Δ) (le rayon de sa trajectoire ou rayon giratoire). Cette vitesse est différente d'un point à l'autre et elle est d'autant plus grande que l'on s'éloigne de l'axe.

- L'accélération angulaire des points du solide est la même : $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, et le vecteur accélération angulaire est : $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\vec{u}_\Delta$.

b/ Le solide :

- sa position est repérée par l'angle θ (c'est l'angle de rotation de l'un de ses points).

- sa vitesse angulaire est celle de l'ensemble de ses points donc, c'est le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Il en est de même pour son accélération angulaire $\vec{\alpha}$.

- le mouvement d'un corps solide en rotation uniformément variée autour d'un axe fixe vérifie les relations établies ci-dessus :

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_o$$

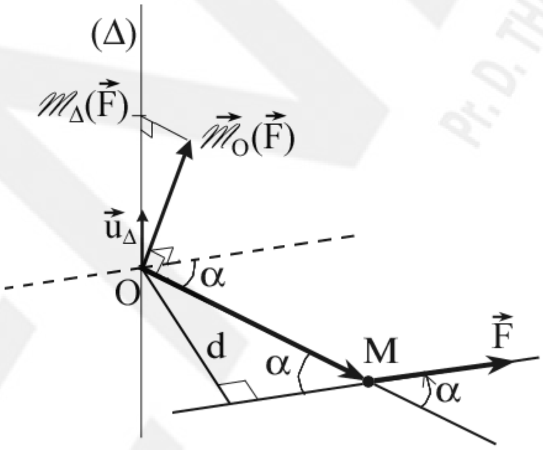
$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t + \theta_o$$

$$\omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha(\theta - \theta_o)$$

V.2- DYNAMIQUE DE ROTATION

V.2.1- DYNAMIQUE DE ROTATION DU POINT MATERIEL

V.2.1.1- Moment de force



a/ <u>Moment de force par rapport à un point O fixe</u>

Soit $\vec{F}$ une force appliquée à un point matériel M. Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point O fixe de l'espace est :

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} .$$

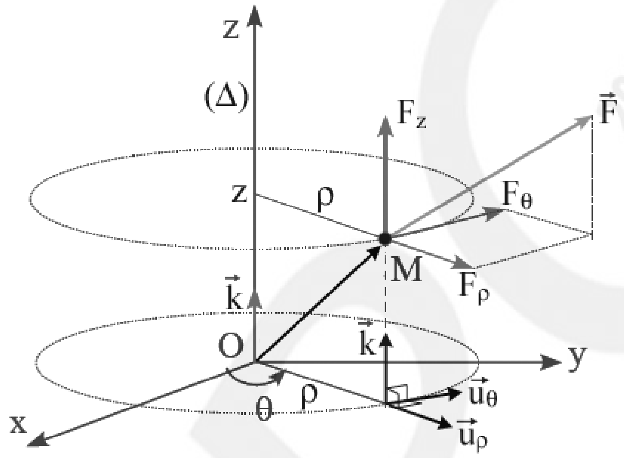
Ce moment est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$. Son module est : $\|\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \|\vec{F}\| \times d$. La distance **d** est appelé « bras de levier ».

b/ Moment de force par rapport à un axe (Δ) fixe passant par O

Le moment de la force $\vec{F}$, appliquée au point matériel M, par rapport à un axe (Δ) passant par O, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, est donné par la quantité algébrique représentant sa projection sur (Δ) :

$$\mathbf{\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F}).\vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_\Delta}.$$

Remarque :



Par exemple, dans un repère cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, posons $\vec{u}_\Delta = \vec{k}$ (Δ étant l'axe Oz) et exprimons $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \\ \vec{F} = F_\rho\vec{u}_\rho + F_\theta\vec{u}_\theta + F_z\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -zF_\theta\vec{u}_\rho + (zF_\rho - \rho F_z)\vec{u}_\theta + \rho F_\theta\vec{k}$$

$$\Rightarrow \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F}).\vec{k} = \rho F_\theta$$

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Oz), qui est égale à ρF_θ, représente la capacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner le point M autour de cet axe. $\vec{F}_\theta$ est tangent au cercle décrit par le point M. C'est la seule composante qui effectue un travail dans le mouvement de rotation autour de (Δ).

Remarque : en général, en coordonnées cylindriques, on utilise r au lieu de ρ pour signifier la composante radiale et la base est alors : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. C'est ce qu'on adoptera par la suite.

V.2.1.2- Moment cinétique

a/ Définitions du moment cinétique par rapport à un point O fixe, par rapport à un axe (Δ) fixe :

*Le moment cinétique par rapport à un point fixe O, noté $\vec{L}_O$, d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est le moment par rapport à O du vecteur quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} \wedge \vec{\mathbf{p}}$$

*Le moment cinétique L_Δ par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, d'un point matériel, est égal à la projection sur (Δ) du moment cinétique $\vec{L}_O$, le point O étant un point fixe de (Δ) :

$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{\Delta}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} . \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\Delta}}$$

Comme nous l'avons fait précédemment, exprimons $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ dans une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ avec $\vec{u}_\Delta = \vec{k}$ (Δ étant l'axe Oz) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k} \\ \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_z\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = -mzv_\theta\vec{u}_\rho + m(zv_r - rv_z)\vec{u}_\theta + mrv_\theta\vec{k}$$

$$\Rightarrow L_\Delta = \vec{L}_O.\vec{k} = mrv_\theta = mr \times r\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega$$

<u>Remarque</u> :

Comme dans le cas du moment d'une force, c'est la composante orthoradiale v_θ de $\vec{v}$ qui intervient dans l'expression du moment cinétique par rapport à l'axe (Δ).

b/ Théorèmes du moment cinétique par rapport à un point O fixe, par rapport à un axe (Δ) :

« Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en un point O fixe est égale au moment des forces extérieures appliquées au point matériel » :

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}}}{\mathbf{dt}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}})$$

Dans le cas d'un mouvement de rotation du point matériel autour d'un axe (Δ), ce théorème s'énonce :

« Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un axe (Δ) fixe, est égale au moment des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ) » :

$$\frac{\mathbf{dL}_{\boldsymbol{\Delta}}}{\mathbf{dt}} = \sum \mathcal{M}_{\boldsymbol{\Delta}}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}})$$

(Cette relation est simplement obtenue en multipliant scalairement la relation précédente par $\vec{u}_\Delta$).

V.2.2- DYNAMIQUE DE ROTATION DU SOLIDE

On va commencer par définir quelques grandeurs caractéristiques du solide.

V.2.2.1- Définition du centre de masse d'un solide

Un corps solide (Σ) est caractérisé par son centre de masse ou centre d'inertie G.

Soit un point O fixe quelconque dans un repère galiléen. Le centre de masse G est défini par son vecteur position $\overrightarrow{OG}$ qui est tel que :

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{\mathbf{OM}}\mathbf{dm}}{\int_{(\Sigma)} \mathbf{dm}} \text{ , soit } \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}} \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{\mathbf{OM}}\mathbf{dm}$$

où :

- M est un point du solide affecté de l'élément de masse dm,
- m représente la masse totale du solide.

Si l'on choisit G à la place de O, le centre de masse G sera tel que : $\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{\mathbf{GM}}\mathbf{dm} = \vec{\mathbf{0}}$

Remarques :

1/ On confondra le centre de masse (ou d'inertie) avec le centre de gravité en supposant le champ de gravité $\vec{g}$ uniforme.

2/ Pour le calcul de l'intégrale $\int_{(\Sigma)}$, trois cas peuvent se présenter : la distribution massique du solide peut être :

- Volumique (solide de volume V):

  $dm = \rho dV$, ρ est la masse volumique (kg/m^3) : $m = \int_{(\Sigma)} dm = \iiint_{(V)} \rho dV$.

- Surfacique (solide de surface S):

  $dm = \sigma dS$, σ est la masse surfacique (kg/m^2) : $m = \int_{(\Sigma)} dm = \iint_{(S)} \sigma dS$.

- Linéique (solide de longueur L) :

  $dm = \lambda d\ell$, λ est la masse linéique (kg/m) : $m = \int_{(\Sigma)} dm = \int_{(L)} \lambda d\ell$.

3/ Pour une distribution discontinue de masses m_i, le centre de masse est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}.$$

En coordonnées cartésiennes, les coordonnées du point G seront :

$$x_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}.$$

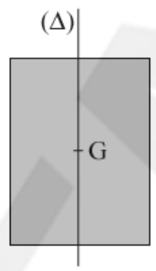
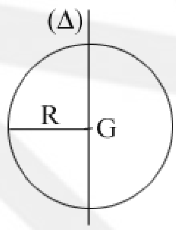
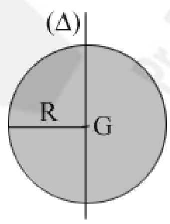
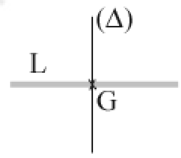
V.2.2.2- Définition du moment d'inertie d'un solide

Un corps solide (Σ) en rotation autour d'un axe (Δ) se caractérise également par son moment d'inertie par rapport à cet axe, noté I_Δ. Cette grandeur représente l'inertie du corps solide dans son mouvement de rotation (par analogie avec une masse dans un mouvement de translation). Pour évaluer l'inertie d'un corps en rotation, l'inertie de sa masse seule ne suffit pas ; il faut en plus considérer <u>la répartition spatiale de cette masse</u> par rapport à son axe de rotation. C'est ce que traduit le moment d'inertie qui dépend donc de la forme du solide.

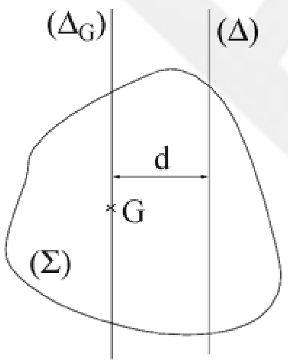
Mathématiquement, le moment d'inertie est donné par la relation : $I_\Delta = \int_{(\Sigma)} r^2 dm$ où r représente la distance de l'élément de masse dm à l'axe.

Dans le cas le plus simple d'une seule particule de masse m, située à la distance r d'un axe fixe, son moment d'inertie est : $I_\Delta = mr^2$.

Le tableau suivant donne les moments d'inertie I_{Δ_G} de quelques solides usuels homogènes par rapport à leurs axes de symétrie passant par leurs centres de masse G respectifs :

Cylindre plein de rayon R	Sphère creuse de rayon R	Sphère pleine de rayon R	Tige mince de longueur L
$I_{\Delta_G} = \frac{1}{2} mR^2$	$I_{\Delta_G} = \frac{2}{3} mR^2$	$I_{\Delta_G} = \frac{2}{5} mR^2$	$I_{\Delta_G} = \frac{1}{12} mL^2$
			

<u>Théorème d'Huygens</u> :



Si l'axe (Δ) ne passe pas par le centre de masse du solide (Σ), on utilise le **théorème d'Huygens** pour le calcul du moment d'inertie par rapport à cet axe : « Le moment d'inertie I_Δ d'un solide par rapport à un axe (Δ) est égale au moment d'inertie du solide par rapport à un axe (Δ_G) passant par G et parallèle à (Δ), augmenté du produit de la masse du solide par la distance au carré entre les deux droites » :

$$\mathbf{I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2}$$

Exemples de calcul :

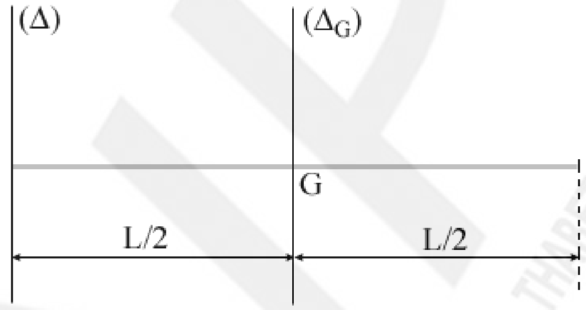
1/ Calcul du moment d'inertie d'une tige homogène de masse m, de longueur L et de masse linéique λ, par rapport à un axe (Δ_G) passant par son centre de masse G.

$$I_{\Delta_G} = \int_{(\Sigma)} r^2 dm = 2\int_0^{L/2} x^2 \lambda dx = 2\lambda \int_0^{L/2} x^2 dx = 2\lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{L}{2}} = 2\lambda \frac{1}{3}\frac{L^3}{8} = \frac{1}{12}(\lambda L)L^2 \Rightarrow \mathbf{I_{\Delta_G} = \frac{1}{12} mL^2}$$

2/ Calcul du moment d'inertie d'une tige homogène de masse m, de longueur L et de masse linéique λ, par rapport à un axe (Δ) passant par l'une de ses extrémités.

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{3} mL^2}$$

Ou directement : $I_\Delta = \int_0^L \lambda x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{3} = \lambda L \frac{L^2}{3} = \frac{mL^2}{3}$



V.2.2.3- Moment cinétique d'un solide indéformable

Soit un solide (Σ) en rotation autour d'un axe fixe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_\Delta$. Tout point M affectée de la masse élémentaire dm à la distance r de l'axe décrit un cercle, le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ lui étant tangent.

a/ Moment cinétique du solide (Σ) par rapport à un point fixe O appartenant à (Δ).

*Le moment cinétique élémentaire par rapport à un point O fixe de (Δ) d'un élément de masse dm est :

$$d\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} dm .$$

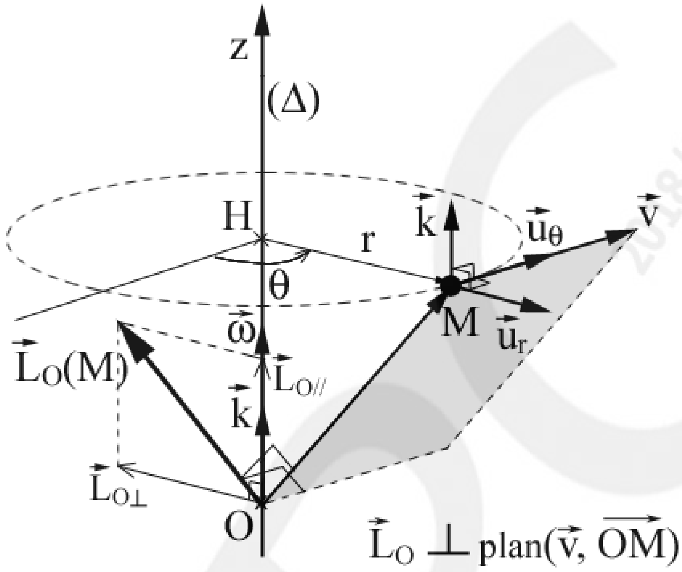
*Le moment cinétique du solide (Σ) **par rapport à O** est :

$$\vec{L}_O = \int_{(\Sigma)} d\vec{L}_O = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} dm .$$

Dans le cas général, $\vec{L}_O$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, c'est-à-dire n'est pas porté par l'axe (Δ).

Considérons les trois cas suivants :

1er CAS : Le cas simple **d'un seul** ***point matériel tournant autour d'un axe (Δ)*** avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$.



On a :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OH} = \vec{0} \text{ car } \vec{\omega} // \overrightarrow{OH}.$$

Le moment cinétique de cette masse placée en M est :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

Exprimons $\overrightarrow{OM}$ dans un repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}.$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k} \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{k}) = \omega r\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = m(r\vec{u}_r + z\vec{k}) \wedge \omega r\vec{u}_\theta = mr^2\omega\vec{k} - mz\omega r\vec{u}_r$$

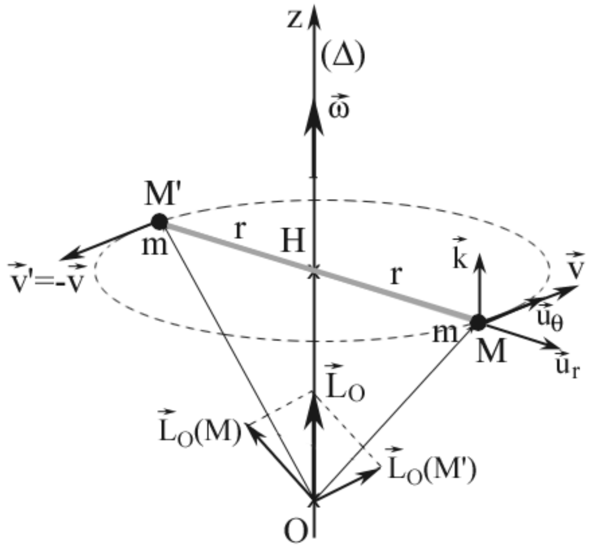
$$\vec{L}_O = mr^2\vec{\omega} - mzr\omega\vec{u}_r$$

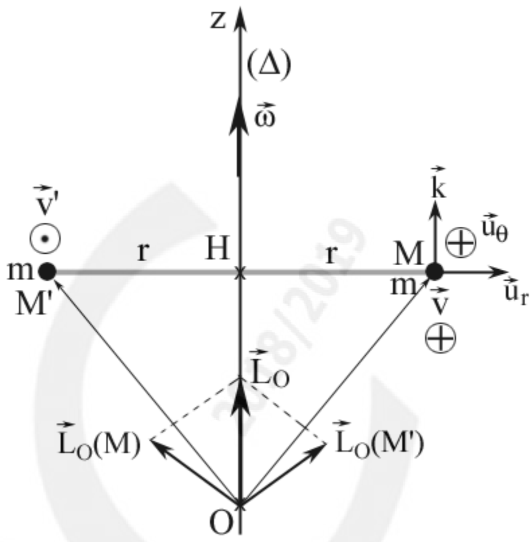
Le moment d'inertie d'un point matériel de masse m en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est : $I_\Delta = mr^2$.

D'où : $\boldsymbol{\vec{L}_O = I_\Delta\vec{\omega} - mzr\omega\vec{u}_r} = \vec{L}_{o//} + \vec{L}_{o\perp}$.

$\boldsymbol{\vec{L}_O}$ ***se décompose en une composante parallèle à (Δ) et une composante perpendiculaire à (Δ).***

2ème CAS : Le moment cinétique d'une ***tige de masse négligeable avec deux masses m fixées à ses extrémités*** qui tourne autour d'un axe fixe (Δ) passant par son milieu H.





Le système (M + M' + tige) constitue un seul solide tournant autour d'un point fixe H dans le plan perpendiculaire à l'axe (Δ). Il est repéré par un (seul) repère local placé en M $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On a :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$ et $\vec{v}(M) = r\omega\vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{OM}' = -r\vec{u}_r + z\vec{k}$ et $\vec{v}'(M') = -\vec{v} = -r\omega\vec{u}_\theta$

Dans ce cas, le système présente une symétrie matérielle par rapport à Oz (axe de rotation) : en effet, les deux masses en M et M' sont symétriques par rapport à H et décrivent un cercle de centre H avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ portée par (Δ).

Comme précédemment, le moment cinétique de la masse placée en M est :

$\vec{L}_O(M) = mr^2\vec{\omega} - mzr\omega r\vec{u}_r$.

Et comme $\overrightarrow{OM}' = -r\vec{u}_r + z\vec{k}$ et $\vec{v}(M') = -\vec{v}(M)$:

le moment cinétique placée en M' est : $\vec{L}_O(M') = mr^2\vec{\omega} + mzr\omega r\vec{u}_r$.

$\vec{L}_O(M)$ et $\vec{L}_O(M')$ sont deux vecteurs symétriques par rapport à l'axe (Δ). Leur somme est donc le vecteur $\vec{L}_O$ porté par (Δ) . Le moment cinétique total du système est donc :

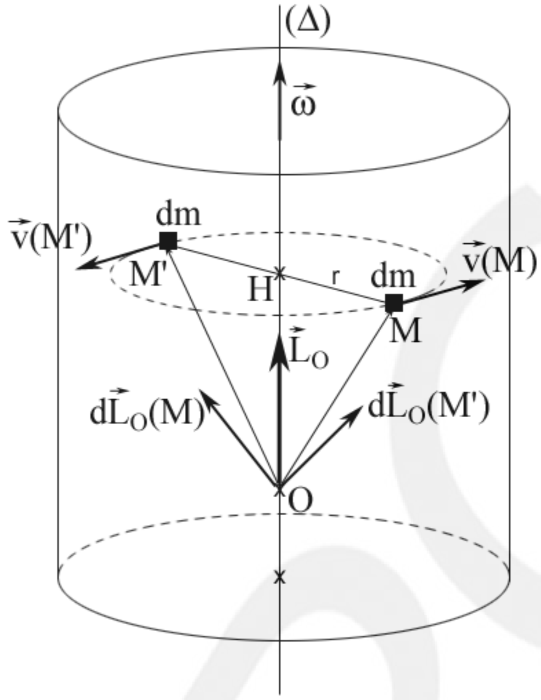
$$\vec{L}_O = \vec{L}_O(M) + \vec{L}_O(M') = 2mr^2\vec{\omega}$$

Le moment d'inertie du système est : $I_\Delta = 2mr^2$

D'où : $$\boldsymbol{\vec{L}_O = I_\Delta\vec{\omega}}$$

Dans ce cas, le moment cinétique du système des deux masses est parallèle à l'axe de rotation.

3ème CAS : Le moment cinétique d'un ***cylindre plein et homogène*** par rapport à un point O appartenant à son axe de symétrie (Δ) et tournant autour de cet axe avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.



Moment cinétique élémentaire par rapport à O de l'élément dm placé en M :

$$d\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)dm\,.$$

Par raison de symétrie, dm(M) a un symétrique dm(M') par rapport à O :

$d\vec{L}_O(M') = \overrightarrow{OM'} \wedge \vec{v}(M')dm$ avec $\vec{v}(M') = -\vec{v}(M)$.

La contribution de deux éléments dm symétriques pour le moment cinétique est :

$$d\vec{L}_O(M) + d\vec{L}_O(M') = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}) \wedge \vec{v}(M)dm = \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{v}(M)dm = 2\overrightarrow{HM} \wedge \vec{v}(M)dm\,.$$

Le moment cinétique total est :

$$\vec{L}_O = \int_{(\Sigma/2)} 2\overrightarrow{HM} \wedge \vec{v}dm = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{HM} \wedge \vec{v}dm = \int_{(\Sigma)} r\vec{u}_r \wedge r\omega\vec{u}_\theta dm = \int_{(\Sigma)} r^2(\omega\vec{k})dm$$

$$\vec{L}_O = \vec{\omega}\int_{(\Sigma)} r^2 dm = \vec{\omega} I_\Delta$$

($r = HM$ étant la distance de l'élément dm à l'axe de rotation (Δ) du cylindre)

Finalement : $$\mathbf{\vec{L}_O = I_\Delta \vec{\omega}}$$

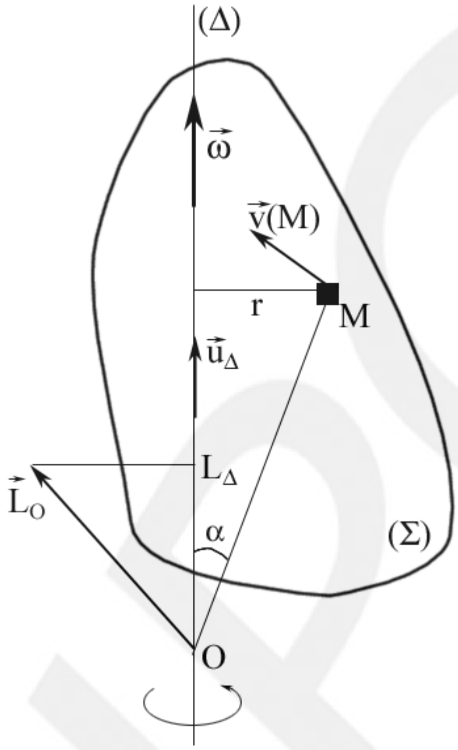
<u>CONCLUSION</u> :

Le moment cinétique du solide (Σ) par rapport à un point O fixe appartenant à (Δ) $\vec{L}_O = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}dm$

ne s'écrit sous la forme $\mathbf{\vec{L}_O = I_\Delta \vec{\omega}}$ ***que dans le cas particulier où l'axe (Δ) est soit un axe de symétrie matériel du solide, soit il est perpendiculaire à un plan de symétrie matériel du solide.***

b/ Moment cinétique du solide (Σ) <u>par rapport à l'axe de rotation (Δ)</u> :

$$\mathbf{L_\Delta = \vec{L}_O.\vec{u}_\Delta = \int_{(\Sigma)} \vec{u}_\Delta.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})dm}$$



Développement de cette relation :

*****Tout point M du solide situé à la distance r de l'axe à une vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM} .$$

Par permutation circulaire du produit mixte : $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b})$, on a :

$$\vec{u}_\Delta.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.(\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}) = \omega(\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM})^2$$

D'autre part : $$(\vec{u}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM})^2 = \left[\|\overrightarrow{OM}\| \sin\alpha\right]^2 = r^2 = HM^2$$

*****Finalement :

$$L_\Delta = \int_{(\Sigma)} \vec{u}_\Delta.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})dm = \omega\int_{(\Sigma)} r^2 dm = I_\Delta\omega$$

La quantité $\int_{(\Sigma)} \mathbf{r^2 dm}$ n'est autre que le **moment d'inertie I_Δ du solide par rapport à l'axe (Δ)**.

Et l'on a la relation importante entre le moment cinétique L_Δ et la vitesse angulaire ω :

$$\mathbf{L_\Delta = I_\Delta \omega}$$

c/ Théorèmes du moment cinétique par rapport à un point O fixe, par rapport à un axe (Δ) :

« ***Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en un point O fixe est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au solide*** » :

$$\mathbf{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext})}$$

Dans le cas d'un **<u>mouvement de rotation du solide autour d'un axe (Δ) fixe</u>**, ce théorème s'énonce :

« ***Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un axe (Δ) fixe, est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ)*** » :

$$\mathbf{\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = I_\Delta}\alpha$$

Puisque $L_\Delta = I_\Delta \omega$, on a : $\frac{dL_\Delta}{dt} = I_\Delta \frac{d\omega}{dt} = I_\Delta \alpha = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow \boldsymbol{\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = I_\Delta \alpha}$

<u>Remarques</u> :

1/ Pour les corps solides présentant un axe de symétrie matérielle, on a démontré la relation vectorielle suivante : $\vec{L}_O = I_\Delta \vec{\omega}$. Dans ce cas, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\mathbf{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow I_\Delta \vec{\alpha} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext})}$$

2/ Cette dernière relation montre une analogie avec le Principe Fondamental de la Dynamique en translation : $\mathbf{m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}}$

Mouvement de translation		Mouvement de rotation
$\sum \vec{F}_{ext}$ **Force (N)**	→	$\sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext})$ **Moment de force (N.m)**
m **Masse inertielle (kg)**	→	I_Δ **Moment d'inertie (kg.m^2)**
$\vec{\gamma}$ **Accélération linéaire (m/s^2)**	→	$\vec{\alpha}$ **Accélération angulaire (rd/s^2)**

La relation $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = I_\Delta \alpha$ peut être considérée comme le Principe Fondamental de la Dynamique pour les corps en rotation autour d'un axe fixe (Δ).

V.3- SOLIDE EN MOUVEMENT DE TRANSLATION ET DE ROTATION

On étudie les deux aspects du mouvement : dynamique et énergétique.

V.3.1- SOLIDE EN TRANSLATION PURE

* Aspect dynamique :

La quantité de mouvement d'un solide (Σ) est : $\vec{p} = \int_{(\Sigma)} \vec{v}dm$

Soit : $\vec{p} = \int_{(\Sigma)} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM}dm$

On a vu que le centre de masse G est défini par son vecteur position $\overrightarrow{OG}$ qui est tel que :

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{\mathbf{OM}}\mathbf{dm}}{\int_{(\Sigma)} \mathbf{dm}} \text{ , soit } \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{\mathbf{OM}}\mathbf{dm}$$

Par conséquent : $\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM}dm = m\overrightarrow{OG}$

Donc, par rapport à un repère galiléen, on a : $\vec{p} = m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\vec{v}_G$.

$\vec{v}_G$ étant la vitesse du centre de masse.

D'où la relation :

$$\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{G}}$$

qui représente la quantité de mouvement du solide en translation.

On déduit, par le théorème de la quantité de mouvement, que :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_G) = m\vec{\gamma}_G = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{G}}$$

C'est la résultante des forces appliquées au centre de gravité, à l'instar du poids. Le PFD s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{G}} \\ \sum \vec{\mathscr{M}}_{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases}$$

*Aspect énergétique :

Tous les points du solide se déplace à la même vitesse $\vec{v}$, y compris le centre de masse G. Donc, l'énergie cinétique du solide en translation pure est : $\mathbf{E_c = \frac{1}{2}mv_G^2}$

V.3.2- SOLIDE EN ROTATION PURE AUTOUR D'UN AXE PASSANT PAR G

*Aspect dynamique :

Le PFD s'écrit :

$$\begin{cases} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{G}} = \vec{\mathbf{0}} \text{ (l'axe de rotation passant par G implique que G est un point fixe)} \\ \sum \mathscr{M}_{\Delta_G}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}}) = \mathbf{I}_{\Delta_G}\,\boldsymbol{\alpha} \text{ (}I_{\Delta_G} \text{ étant le moment d'inertie par rapport à un axe } \Delta_G \text{ passant par G)} \end{cases}$$

*Aspect énergétique :

Un élément de masse dm du solide (Σ) a une vitesse v qui varie selon sa position et une vitesse angulaire ω, identique pour tous les points. Son énergie cinétique élémentaire est :

$$dE_c = \frac{1}{2}dm.v^2 = \frac{1}{2}dm.(r\omega)^2 = \frac{1}{2}dm.r^2\omega^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\left(\int_{(\Sigma)} r^2 dm\right)\omega^2 \Rightarrow \mathbf{E_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I}_{\Delta_G}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}.$$

V.3.3- SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE PASSANT PAR UN POINT O FIXE (AUTRE QUE G).

*Aspect dynamique :

Le PFD s'écrit : (avec axe de rotation $\Delta_O \neq \Delta_G$)

$$\begin{cases} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{G}} \text{ (l'axe de rotation passant par O fixe implique que G n'est pas un point fixe)} \\ \sum \mathscr{M}_{\Delta_O}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}}) = \mathbf{I}_{\Delta_O}\,\boldsymbol{\alpha} \text{ (}I_{\Delta_O} \text{ étant le moment d'inertie par rapport à un axe } \Delta_O \text{ passant par O)} \end{cases}$$

*Aspect énergétique :

L'énergie cinétique totale est :

$$\mathbf{E_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}\mathbf{v}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I}_{\Delta_G}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I}_{\Delta_O}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$$

Récapitulatif :

Tableau de correspondance entre un mouvement translation et un mouvement de rotation pure autour d'un axe fixe (Δ) :

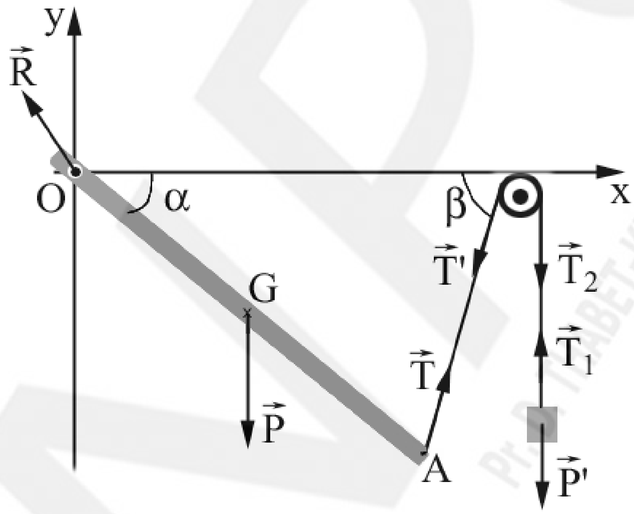
Paramètres	Mouvement de translation	Mouvement de rotation	
		Cas général	Avec axe de symétrie
Principe Fondamental de la Dynamique	$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_G$	$\sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = I_\Delta \alpha$	$\sum \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = I_\Delta \vec{\alpha}$
Quantité de mouvement / Moment cinétique	$\vec{p} = m\vec{v}_G$	$L_\Delta = I_\Delta \omega$	$\vec{L}_O = I_\Delta \vec{\omega}$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$	$E_c = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$	$E_c = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$

V.4- CONDITION D'EQUILIBRE D'UN SOLIDE

Pour qu'un solide soit en équilibre statique, il faut que l'on ait simultanément :

$$\begin{cases} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \vec{\mathbf{0}} \\ \sum \vec{\mathscr{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases}$$

Exemple d'application des conditions d'équilibre statique d'un solide susceptible d'avoir un mouvement de rotation : Une barre homogène de longueur OA = L, de poids P, de centre de gravité G peut tourner autour d'un clou fixé en O. L'extrémité A de la barre est attachée à un fil inextensible sans masse qui passe par une poulie. Un poids P' est attaché à l'autre bout du fil. On négligera tout frottement. Déterminer la relation entre α et β à l'équilibre.



Le fil est inextensible et sans masse. A l'équilibre, on a :

$$\|\vec{P}'\| = \|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}'\| = \|\vec{T}\|$$

La tige est soumise aux forces suivantes :

*Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué au centre de gravité G.

*La tension du fil $\vec{T}$.

*La réaction du clou $\vec{R}$ sur la barre.

Pour les corps en rotation, la loi fondamentale de la Dynamique seule ne suffit pas pour décrire le système.

La barre est en équilibre lorsque : $\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{\mathscr{M}}_{O}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases} \vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=\vec{0} \\ \mathscr{M}_O(\vec{P})+\mathscr{M}_O(\vec{T})+\mathscr{M}_O(\vec{R})=\vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=\vec{0} \\ \overrightarrow{OG}\wedge\vec{P}+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{T}=\vec{0} \end{cases}$

Composantes des différents vecteurs sur Ox et Oy (projections sur Ox et Oy) :

$$\vec{P}\left|\begin{matrix}0\\-P\end{matrix}\right. \quad \vec{T}\left|\begin{matrix}T\cos\beta\\T\sin\beta\end{matrix}\right. \quad \vec{R}\left|\begin{matrix}R_x\\R_y\end{matrix}\right. \quad \overrightarrow{OG}\left|\begin{matrix}\frac{L}{2}\cos\alpha\\-\frac{L}{2}\sin\alpha\end{matrix}\right. \quad \overrightarrow{OA}\left|\begin{matrix}L\cos\alpha\\-L\sin\alpha\end{matrix}\right.$$

D'où le système de trois équations permettant de déterminer une relation entre α et β à l'équilibre :

$$\begin{cases} T\cos\beta+R_x=0 & (1) \\ -P+T\sin\beta+R_y=0 & (2) \\ -\dfrac{PL}{2}\cos\alpha+TL\cos\alpha\sin\beta+TL\sin\alpha\cos\beta=0 & (3) \end{cases}$$

Avec T = P'.

$(1)\Rightarrow R_x=-P'\cos\beta<0$

$(2)\Rightarrow R_y=P-P'\sin\beta$

En divisant la relation (3) par $P'L\cos\alpha\cos\beta$, on obtient :

$$(3)\Rightarrow -\frac{P}{2P'\cos\beta}+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha=0\Rightarrow \boldsymbol{\mathrm{tg}\alpha=\frac{P}{2P'\cos\beta}-\mathrm{tg}\beta}$$