SOMMAIRE

CHAPITRE IV- Travail et énergie - Chocs

IV- Travail et énergie - Chocs

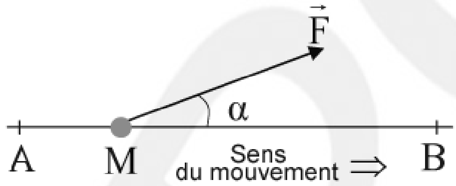
IV.1- TRAVAIL D'UNE FORCE

IV.1.1- TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE APPLIQUEE A UN POINT MATERIEL DANS UN MOUVEMENT RECTILIGNE

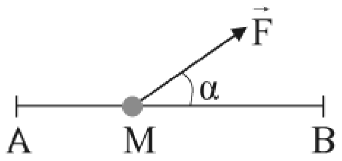
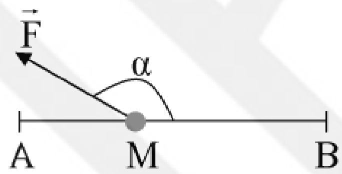
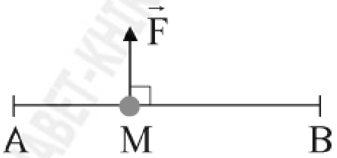
On définit le travail d'une force constante $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M se déplaçant de A à B sur une droite par le produit scalaire entre cette force $\vec{F}$ et le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$:

$$\mathbf{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \cos\alpha}$$

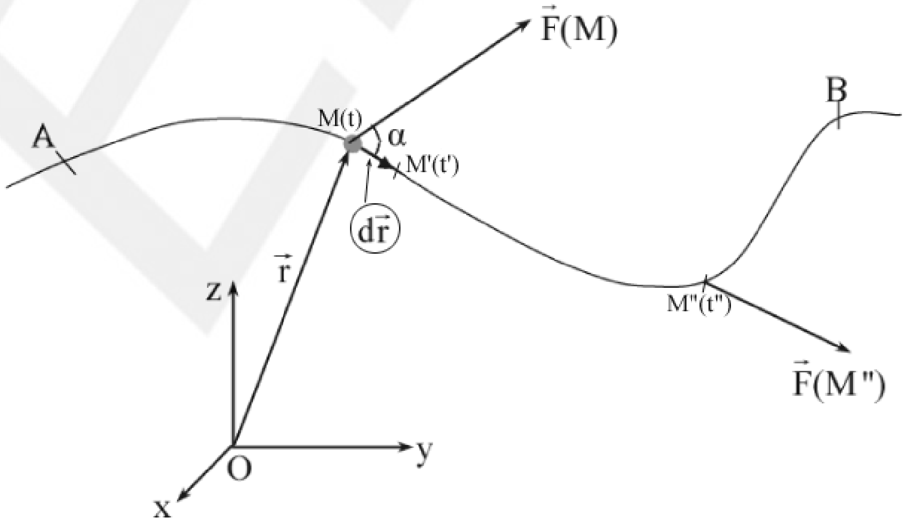
<u>UNITE</u> : Le JOULE (J) : $1J = 1N.m$.



Trois cas peuvent se présenter suivant le signe de $\cos\alpha$:

 ⇒ $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0,$	 ⇒ $W_{A\to B}(\vec{F}) < 0,$	 ⇒ $W_{A\to B}(\vec{F}) = 0,$ $\vec{F} \perp \overrightarrow{AB} \quad (\alpha = \pi/2)$
Travail moteur	Travail résistant	Travail nul

IV.1.2-TRAVAIL D'UNE FORCE VARIABLE - TRAVAIL ELEMENTAIRE



Dans le cas général, le point matériel de position M(t), sur une trajectoire curviligne dans l'espace, est soumis à une force $\vec{F}(t)$ (ou $\vec{F}(M)$) variable avec le temps.

Pour le calcul du travail de la force $\vec{F}$ appliquée au point matériel entre les deux points A et B de la trajectoire (voir figure précédente), on exprime d'abord le travail élémentaire de $\vec{F}$ entre deux positions M(t) et M'(t') <u>infiniment rapprochées</u> de la trajectoire (c'est-à-dire pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$), noté $dW_{M\to M'}(\vec{F})$. Pour $\Delta t \to 0$, lorsque les points M et M' sont très proches, le module du vecteur déplacement tend vers zéro : $\|\overrightarrow{MM'}\| \to 0$, et sa direction <u>tend vers</u> la tangente à la trajectoire en M. On assimile alors ce vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ à un élément $d\vec{r}$ (porté par la tangente à la trajectoire en M):

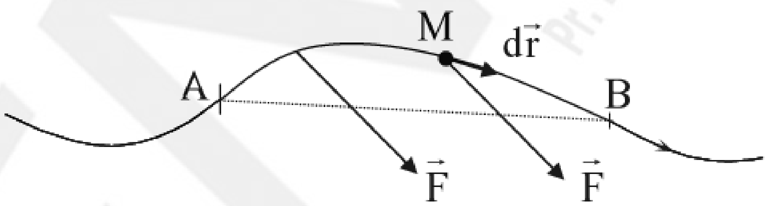
$$\mathbf{dW_{M\to M'}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{MM'} = \vec{F}.d\vec{r} = Fdrcos\alpha}$$

$F\cos\alpha$ représente la composante tangentielle de la force $\vec{F}$: c'est cette composante qui travaille. Le travail de la composante $F\sin\alpha$, normale à la trajectoire, est nul.

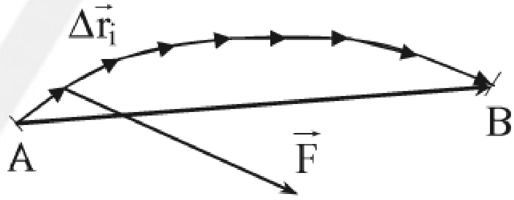
Le travail total entre les positions A et B de la force $\vec{F}$ appliquée à M est obtenu par intégration entre A et B :

$$\mathbf{W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}}$$

IV.1.3- TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE EN DIRECTION ET EN MODULE



Le point matériel se déplace sur une trajectoire quelconque, entre les positions A et B, sous l'effet d'une force $\vec{F}$ constante en module et qui conserve sa direction et son sens.



Le travail entre A et B est la somme de tous les travaux élémentaires et comme la force $\vec{F}$ est constante, ce travail est simplement $\vec{F}.\overrightarrow{AB}$:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \sum_i \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}_i = \vec{F}\cdot\sum_i \Delta\vec{r}_i = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow \mathbf{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$$

ou bien, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par exemple :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz = F_x\int_{x_A}^{x_B} dx + F_y\int_{y_A}^{y_B} dy + F_z\int_{z_A}^{z_B} dz$$

Les composantes de $\vec{F}$: F_x, F_y et F_z sont constantes.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = F_x(x_B - x_A) + F_y(y_B - y_A) + F_z(z_B - z_A) \Rightarrow \mathbf{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$$

<u>Conclusion</u> : Le travail d'une force constante en direction et en module est indépendant de la trajectoire. Il ne dépend que des positions initiale et finale du point matériel.

IV.1.4- EXEMPLES DE CALCUL DU TRAVAIL D'UNE FORCE

<u>Exemple 1</u> : TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE : POIDS D'UN POINT MATERIEL

Puisque $\vec{P} = \overrightarrow{cste}$, on a :

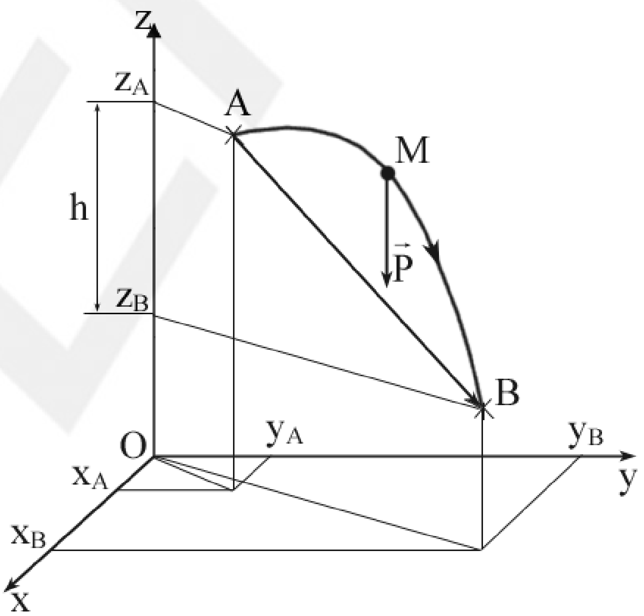
$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = (-mg\vec{k}).\left((x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\right) = mg(z_A - z_B) = mgh$$

$$\mathbf{W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = mgh}$$

Ou bien en utilisant la définition générale du travail :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}.d\vec{r} = \int_A^B (-mg\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int_{z_A}^{z_B} -mgdz == mg(z_A - z_B) = mgh$$

Le travail de $\vec{P}$ ne dépend pas de la forme de la trajectoire.



<u>Remarque</u> : Quand le point matériel passe de A à B vers le bas, le travail du poids est moteur. Il est positif. C'est le cas présenté ci-dessus.

Par contre, si le point matériel se déplace vers le haut de B vers A, alors le travail du poids est résistant (négatif):

$$W_{B\to A}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{BA} = (-mg\vec{k}).\left((x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}\right) = mg(z_B - z_A) = -mgh$$

<u>Exemple 2</u> : TRAVAIL D'UNE FORCE VARIABLE

Un point matériel se déplace sous l'action d'une force $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$ sur une droite d'équation $y = 2x$.

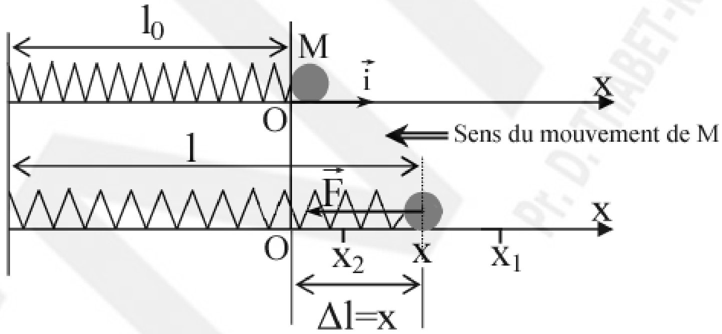
Trouver le travail de cette force lorsque le point se déplace du point O au point A(2,4).

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = (x\vec{i} + 2y\vec{j}).(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = xdx + 2ydy$$

En remplaçant $y = 2x$ et $dy = 2dx$, on obtient : $dW = xdx + 2ydy = xdx + 4x(2dx) = 9xdx$

Le travail entre O et A est donc : $W_{O\to A}(\vec{F}) = \int_0^2 9xdx = \frac{9}{2}\left[x^2\right]_0^2 = 18\ J$

<u>Exemple 3</u> : TRAVAIL DE LA FORCE DE RAPPEL D'UN RESSORT



Un ressort de constante d'élasticité k repose sur un plan horizontal. Il est fixe à une extrémité et à l'autre est accrochée une masse M. On étire le ressort puis on lâche. Il y a absence de frottement. Quel est le travail de la force de rappel $\vec{F}$ lorsque la masse se déplace de la position x_1 à la position x_2 ?

La force de rappel du ressort appliquée à la masse M est : $\boldsymbol{\vec{F} = -k\vec{x} = -kx\vec{i}}$.

$$W_{x_1\to x_2}(\vec{F}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx\vec{i}).(dx\vec{i}) = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{k}{2}\left[x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

$$\boldsymbol{W_{x_1\to x_2}(\vec{F}) = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)}$$

Le travail de $\vec{F}$ ne dépend que des positions initiale et finale du point matériel.

IV.1.5- PUISSANCE INSTANTANEE D'UNE FORCE

Définition : La puissance instantanée d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ est la variation instantanée du travail de cette force. C'est donc la dérivée par rapport au temps du travail $W(\vec{F})$:

$$\mathbf{P(t) = \frac{dW}{dt}}$$

Autrement dit, la puissance représente le travail de la force par unité de temps.

La puissance s'exprime aussi de la manière suivante :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$\mathbf{P(t) = \vec{F}(t).\vec{v}(t)}$$

Le travail d'une force entre les instant t_1 et t_2 peut alors s'exprimer ainsi :

$$\mathbf{W_{t_1 \to t_2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{v}dt}$$

UNITE : L'unité de la puissance est le WATT (W) : $1W = 1J/s = 1N.m/s$.

Autre unité : Le CHEVAL-VAPEUR (CV) : 1CV=736 W.

IV.2- ENERGIE

IV.2.1- ENERGIE CINETIQUE

Un point matériel de masse m se déplace dans un repère galiléen sous l'action de forces extérieures $\vec{F}_i$.

Le Principe Fondamental de la Dynamique donne :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Pour un déplacement infinitésimal, le travail élémentaire de la résultante des forces $(\sum \vec{F}_i)$ est :

$$dW(\sum \vec{F}_i) = \left(\sum_{i}^{n} \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = md\vec{v}.\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}.d\vec{v}$$

Le travail de la résultante des forces $\left(\sum_{i} \vec{F}_i\right)$ appliquée au point matériel de la position A où sa vitesse est v_A à la position B où sa vitesse est v_B est :

$$W_{A \to B}(\sum \vec{F}_i) = \int_A^B dW = \int_A^B m\vec{v}.d\vec{v} == m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

Soit finalement :

$$\mathbf{W_{A\to B}(\sum \vec{F}_i) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

On constate que ce travail ne dépend que des vitesses initiale et finale du point matériel.

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$ est appelée **Energie cinétique** du point matériel de masse **m** et de vitesse **v**, notée E_c : $\mathbf{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$.

THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE :

Dans un repère galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre les positions A et B, est égale au travail de la résultante des forces appliquées au point matériel pendant son déplacement du point A au point B :

$$\mathbf{\Delta E_c\Big|_A^B = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\sum \vec{F}_i)}$$

Remarques :

1/ L'énergie cinétique est toujours positive.

2/ En introduisant la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, on a aussi : $\mathbf{E_c = \frac{p^2}{2m}}$.

3/ On a vu que si $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement, c'est-à-dire au vecteur vitesse $\vec{v}$, son travail est nul, donc : $W_{A\to B}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c = 0 \Rightarrow E_c = C^{ste}$:

$$\mathbf{\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow E_c = C^{ste}}$$

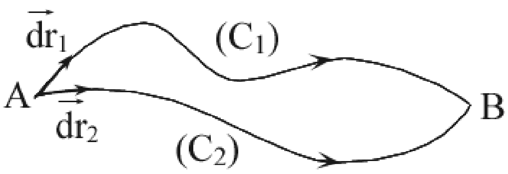
4/ On montre que : $W_{A\to B}(\sum \vec{F}_i) = \sum W^i_{A\to B}(\vec{F}_i)$: le travail de la résultante $(\sum \vec{F}_i)$ est égale à la somme des travaux des forces.

IV.2.2- ENERGIE POTENTIELLE

IV.2.2.1- Force conservative et force non-conservative

a/ Force conservative : On appelle « force conservative » appliquée à un point matériel, une force notée $\vec{F}^c$ dont le travail est indépendant de la trajectoire de ce point, mais ne dépend que des positions de départ et d'arrivée (ce travail ne dépend également pas de la vitesse et du temps).

Exemples : Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la force élastique du ressort $\vec{F} = -k\vec{x}$, la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ et les forces constantes d'une manière générale, sont des forces conservatives.



La figure montre deux chemins (C1) et (C2) pour aller de A à B. La force est conservative si :

$$W^{(C_1)}_{A\to B}(\vec{F}^c) = W^{(C_2)}_{A\to B}(\vec{F}^c) \Rightarrow \int_A^B \vec{F}^c.d\vec{r}_1 = \int_A^B \vec{F}^c.d\vec{r}_2$$

b/ Forces non-conservatives : Une « force est non-conservative » si son travail dépend du chemin parcouru par le point matériel.

<u>Exemples</u> : les forces de frottement $\vec{f} = -\mu N\vec{u}_T$, $\vec{f} = -\mu\vec{v}$, la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$, les forces qui dépendent d'une manière explicite du temps ou de la vitesse.

IV.2.2.2- Energie potentielle

Le travail d'une force conservative $\vec{F}^c$ appliquée à un point matériel, entre les positions A et B, peut s'exprimer à l'aide d'une fonction scalaire appelée « énergie potentielle » notée E_p. Ce travail est égal à la différence de cette énergie potentielle entre les points initial A et final B. Exprimé de cette manière, le travail de la force conservative ne dépend que des positions A et B et non de la trajectoire du point matériel.

$$\mathbf{W_{A\to B}(\vec{F}^c) = \int_A^B \vec{F}^c.d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B)}$$

Autrement dit : $$\mathbf{\Delta E_p\Big|_A^B = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\to B}(\vec{F}^c) = -\int_A^B \vec{F}^c.d\vec{r}}$$

Ainsi, la variation de l'énergie potentielle du point matériel entre les points A et B est égale en valeur absolue et opposée (en signe) au travail de la résultante des forces conservatives appliquées au point matériel durant son déplacement du point A au point B.

<u>Définition différentielle de l'énergie potentielle</u> :

$$\Delta E_p = -W_{A\to B}(\vec{F}_c) = -\int_A^B \vec{F}^c\cdot d\vec{r}$$ et d'autre part : $$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B dE_p$$

$$\Rightarrow \int_A^B dE_p = -\int_A^B \vec{F}^c\cdot d\vec{r}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{dE_p = -\vec{F}^c.d\vec{r}}}$: c'est la définition différentielle de la fonction énergie potentielle E_p.

- Cette relation peut s'exprimer autrement en introduisant l'opérateur « **gradient** » :

Pour simplifier, exprimons la fonction énergie potentielle en coordonnées cartésiennes $E_p = E_p(x, y, z)$.

L'expression de la différentielle totale d'une fonction à trois variables en coordonnées cartésiennes est :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

En remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}E_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial a}\vec{k}\right)E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial a}\vec{k}$, alors dE_p peut s'écrire sous la forme suivante :

$$dE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}E_p \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}E_p.d\vec{r}$$

D'autre part, $dE_p = -\vec{F}^c.d\vec{r}$ **.**

On déduit que la force conservative peut s'exprimer en fonction de l'énergie potentielle de la manière suivante : $\boldsymbol{\vec{F}^c = -\overrightarrow{\mathrm{Grad}}E_p}$ **.** On dit que « la force conservative $\vec{F}^c$ dérive du potentiel E_p ».

(Ce qui précède est également valable si l'énergie potentielle est exprimée en fonction d'autres variables : polaires (ρ, θ), cylindriques (ρ, θ, z) ou sphériques (r, θ, φ)).

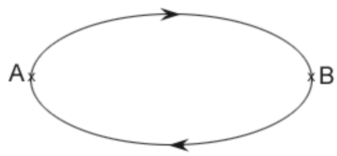
Les composantes de $\vec{F}^c$ sont :

$$\mathbf{F_x^c = -\frac{\partial E_p}{\partial x}}, \quad \mathbf{F_y^c = -\frac{\partial E_p}{\partial y}}, \quad \mathbf{F_z^c = -\frac{\partial E_p}{\partial z}}$$

- Par ailleurs, $\vec{F}^c = -\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,E_p = -\vec{\nabla}E_p$ est une propriété de la force conservative. Deux autres propriétés s'en déduisent :

* $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{F}^c = \vec{0}}$ (Rotationnel de $\vec{F}^c$).

En effet : $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{F}^c = \vec{\nabla}\wedge\vec{F}^c = \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}E_p) = -(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla})E_p = \vec{0}$.



* $\boldsymbol{\oint \vec{F}^c.d\vec{r} = 0}$ (Travail sur un contour fermé)

En effet : $W_{A\to A}(\vec{F}^c) = \oint \vec{F}^c.d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}^c\cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}^c\cdot d\vec{r} = \big(E_p(A) - E_p(B)\big) + \big(E_p(B) - E_p(A)\big) = 0$

<u>Remarque importante</u> :

L'expression suivante : $dE_p = -\vec{F}^c.d\vec{r}$ donne $\boldsymbol{E_p = -\int \vec{F}^c.d\vec{r} + C}$ et montre que l'énergie potentielle n'est connue qu'à une constante près. Dans les problèmes, il faudra choisir arbitrairement un point où l'énergie potentielle est nulle (afin d'annuler la constante C).

IV.2.2.3- Exemples de calcul de l'énergie potentielle

<u>Exemple 1</u> :

Calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle (loi de l'attraction universelle)

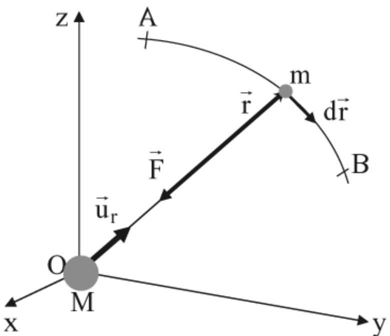


Figure 1

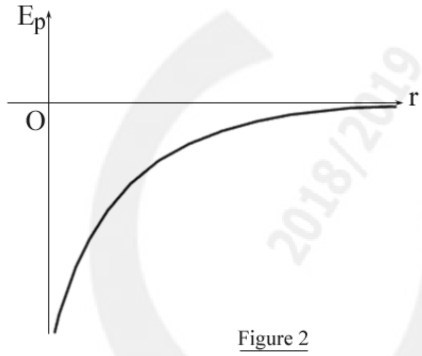


Figure 2

Considérons l'attraction réciproque de deux masses M et m. La masse M exerce sur la masse m une force $\vec{F}$ donnée par la loi de gravitation universelle (figure 1) : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$.

A partir de la définition différentielle de l'énergie potentielle : $dE_p = -\vec{F}.d\vec{r}$ avec $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$ et

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi \Rightarrow dE_p = \frac{GMm}{r^2}dr \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{r} + C$$

Ici, la condition pour annuler C est : $E_p(r \to \infty) = 0$, d'où l'expression de E_p : $\mathbf{E_p(r) = -\frac{GMm}{r}}$

La figure 2 donne la variation de E_p en fonction de r.

<u>Remarque</u> : On a vu (chapitre III) que le mouvement est plan pour les forces à accélération centrale, ce qui est notre cas. Le mouvement est donc plan et on peut travailler en coordonnées polaires, en prenant simplement : $d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$.

<u>2ème méthode</u> :

Le travail de cette force appliquée à la masse m lorsque celle-ci se déplace du point A au point B est :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

En coordonnées sphériques, l'élément de longueur $d\vec{r}$ s'écrit : $d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}\varphi$.

L'expression du travail devient alors :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_A^B = \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A} = \left[\left(-\frac{GMm}{r_A}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right)\right] = E_p(A) - E_p(B)$$

On a donc : $W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$ avec $E_p = -\frac{GMm}{r} + C$

En considérant qu'à l'infini $(r \to \infty)$ l'énergie potentielle s'annule, on déduit que C = 0 et l'expression de l'énergie potentielle devient : $\mathbf{E_p(r) = -\dfrac{GMm}{r}}$.

<u>Exemple 2</u> :

Calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle d'un point matériel de masse m situé à la hauteur z de la surface de la Terre, soumis à son poids.

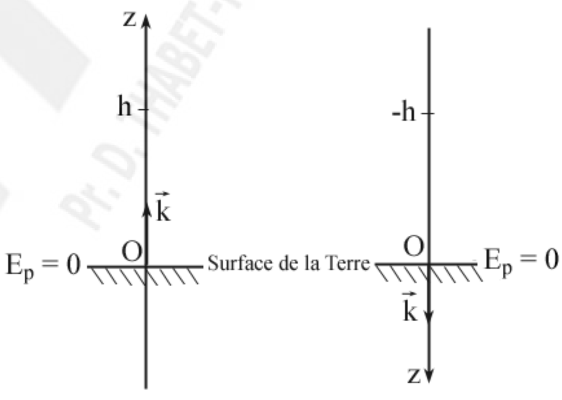
Considérons le repère $(O, \vec{k})$ avec $\vec{k}$ dirigé vers le haut (Figure 1). Le poids du point matériel est $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$.

$$dE_p = -\vec{P}.d\vec{r} = -(-mg\vec{k}).(dz\vec{k}) = mgdz \Rightarrow E_p = \int mgdz + C = mgz + C$$

Pour fixer la constante C, choisissons la surface de la Terre comme origine de l'énergie potentielle, soit : $E_p(z=0) = 0$. Alors : $E_p(z=0) = mg \times 0 + C \Rightarrow C = 0$.

D'où l'expression de l'énergie potentielle d'un point matériel de masse m à la hauteur z de la surface terrestre. : $\mathbf{E_p(z) = mgz}$. Un objet de masse m à la hauteur h de la surface de la Terre aura une énergie potentielle $E_p(z = h) = +mgh$.

<u>Remarques</u> :



(Figure 1) (Figure 2)

1/ Si l'on prend le repère $(O, \vec{k})$ avec $\vec{k}$ dirigé vers le bas (Figure 2), on aura :

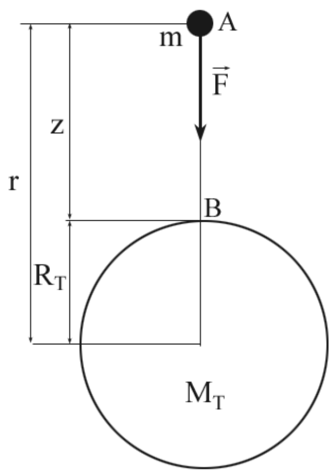
$$dE_p = -\vec{P}.d\vec{r} = -(mg\vec{k}).(dz\vec{k}) = -mgdz$$

$$\Rightarrow E_p = -\int mgdz + C = -mgz + C$$

avec $C = 0$ pour $z = 0$.

Et alors : $\mathbf{E_p(z) = -mgz}$. Dans ce cas, par rapport à ce repère, un objet à la hauteur **(-h)** de la surface de la Terre, aura une énergie potentielle :

$$E_p(z = -h) = -mg(-h) = +mgh .$$



2/ A partir de l'expression de l'énergie potentielle déterminée dans le cas générale de l'attraction universelle, dans le 1er exemple, on peut retrouver l'expression de l'énergie potentielle du point matériel de masse m au voisinage de la Terre de masse M_T et de rayon R_T :

$$\Delta E_{p\,B\to A} = E_p(A) - E_p(B) = \left(-\frac{GM_T m}{R_T + z}\right) - \left(-\frac{GM_T m}{R_T}\right) = GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + z}\right) = \frac{GM_T}{R_T^2} m \frac{z}{1 + \frac{z}{R_T}}$$

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}8 m/s^2$$

$$z << R_T \Rightarrow 1 + \frac{z}{R_T} \approx 1$$

D'où : $\Delta E_{p\,B\to A} = mgz$: le point matériel, en passant de la surface de la Terre (B) à la hauteur z(A), gagne une énergie potentielle égale à **mgz**. Dans ce cas, on peut considérer la surface de la Terre comme origine des potentielles et on écrit simplement : $E_p(A) - E_p(B) = E_p(A) = E_p(z) = mgz$.

Exemple 3 :

Calcul de l'énergie potentielle élastique d'un système masse-ressort.

On a vu aussi que le travail de la force de rappel du ressort ne dépendait que des positions initiale et finale de la masse accrochée à l'extrémité du ressort. La force de rappel est une force conservative $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{-kx\vec{i}}$.

$$dE_p = -\vec{F}.d\vec{r} = -(-kx\vec{i}).(dx\vec{i}) = kxdx \Rightarrow E_p = \int kxdx + C = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Pour fixer la constante C, posons que l'énergie potentielle du ressort est nulle lorsque son élongation est nulle (x = 0). Alors : C=0.

L'énergie potentielle du ressort étiré ou compressé d'une longueur x est donc : $\mathbf{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

Remarque :

A partir de l'expression de l'énergie potentielle, on peut retrouver l'expression de la force $\vec{F}^c$ à partir de la relation $\vec{F}^c = -\overrightarrow{Grad}\,E_p$:

***Pour le poids :**

$$\mathbf{E_p(z) = mgz} \Rightarrow \vec{P} = -\overrightarrow{Grad}E_p = -\frac{dE_p}{dz}\vec{k} = -\frac{d(mgz)}{dz}\vec{k} = -mg\vec{k} \Rightarrow \mathbf{\vec{P} = -mg\vec{k}}$$ (Pour Oz dirigé vers le haut).

***Pour la force de rappel :**

$$\mathbf{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{Grad}E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\vec{i} = -kx\vec{i} \Rightarrow \mathbf{\vec{F} = -kx\vec{i}}$$

IV.2.3- ENERGIE MECANIQUE OU ENERGIE TOTALE

Le théorème de l'énergie cinétique dit que la variation d'énergie cinétique entre deux positions A et B est égale au travail des forces appliquées au point matériel durant son déplacement de A vers B. Il est sous-entendu ici qu'il s'agit de <u>toutes les forces</u>, celles conservatives $\vec{F}^c$ comme celles non-conservatives $\vec{F}^{nc}$ notées $\vec{f}$:

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{F}) = W_{A\to B}(\vec{F}^c) + W_{A\to B}(\vec{f}) \qquad (1)$$

où $\vec{F}$ représente la résultante de toutes les forces.

$\vec{F}^c$ est conservative, donc son travail est égal à la différence de l'énergie potentielle de A à B :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_c) = E_p(A) - E_p(B)\,.$$

La relation (1) devient : $E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + W_{A\to B}(\vec{f})$

$\left[E_c(B) + E_p(B)\right] - \left[E_c(A) + E_p(A)\right] = W_{A\to B}(\vec{f})$

$$\mathbf{(E_c + E_p)\big|_B - (E_c + E_p)\big|_A = W_{A\to B}(\vec{f})}$$

On en déduit la définition de l'énergie mécanique ou totale : la quantité $(E_c + E_p)$ s'appelle énergie mécanique ou énergie totale notée E_m ou E_T.

<u>THEOREME DE L'ENERGIE TOTALE (OU MECANIQUE)</u>:

Dans un repère galiléen, la variation de l'énergie totale d'un point matériel entre les positions A et B, est égale au travail de la résultante des forces non-conservatives appliquées au point matériel pendant son déplacement du point A au point B :

$$\mathbf{\Delta E_T\big|_A^B = E_T(B) - E_T(A) = W_{A\to B}(\vec{f})}$$

<u>Remarque</u> : Généralement, les forces non-conservatives sont les forces de frottement. Il en résulte une diminution de l'énergie totale convertie en énergie thermique (chaleur) car $\mathbf{W_{A\to B}(\vec{f}) < 0}$.

<u>PRINCIPE DE CONSERVATION DE L'ENERGIE TOTALE</u>:

Si un système mécanique est isolé, c'est-à-dire qu'il n'échange aucune énergie avec l'environnement extérieur, alors l'énergie totale se conserve.

$$\mathbf{\Delta E_T\big|_A^B = E_T(B) - E_T(A) = 0 \Rightarrow E_T = Cste,\ \forall t}$$

On ne peut qu'avoir transformation d'une énergie en une autre : on dit que les énergies E_c et E_p se compensent à tout instant. Le système ne peut pas perdre de l'énergie et alors $W_{A\to B}(\vec{f}) = 0$. Par conséquent $\vec{f} = \vec{0}$ (pas de frottement).

<u>Conséquence</u> : $\Delta E_T = 0 \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \mathbf{\Delta E_c = -\Delta E_p}$, ce qui signifie qu'au cours du déplacement du point matériel, celui-ci peut voir son énergie cinétique diminuer $\Delta E_c < 0$ et alors son énergie potentielle augmente $\Delta E_p > 0$, ou inversement.

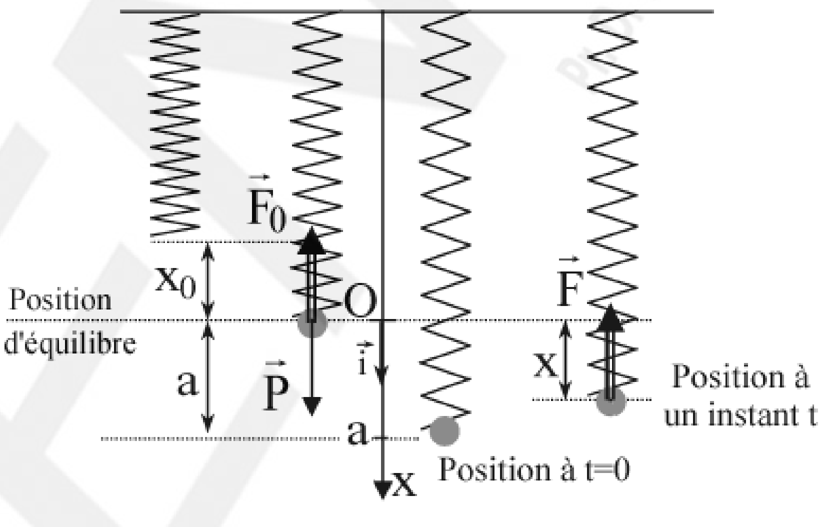
<u>Application 1 :</u> Système masse-ressort.

Un ressort de raideur **k** est suspendu verticalement par l'une de ses extrémités. A l'autre extrémité est accroché un point matériel de masse **m**. Le système mécanique masse-ressort est isolé énergiquement de l'extérieur (On suppose qu'il n'y a pas de frottement). On considère le repère $(O, \vec{i})$ sur l'axe Ox dirigé vers le bas.

- A l'équilibre, après avoir accroché la masse, l'élongation est x_o :

$$\vec{P} + \vec{F}_o = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{P}\| = \|\vec{F}_o\| \Rightarrow mg = kx_o .$$

- A l'instant initial, le ressort est étiré d'une quantité **a** puis on lâche la masse sans vitesse initiale : la masse n'est soumise qu'à la force de rappel du ressort.



Principe Fondamental de la dynamique : $\vec{F} = m\vec{\gamma}$

$\vec{F} = -kx\vec{i}$

$\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i}$

Projection sur l'axe Ox : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \mathbf{m\ddot{x} + kx = 0}$

On obtient l'équation différentielle du mouvement du point matériel.

Sa solution est : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. C'est la position de la masse à l'instant **t**.

On déduit sa vitesse : $v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$, avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation du mouvement sinusoïdal.

Compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = a = A\cos\varphi \\ v(0) = 0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x(t) = a\cos\omega t} \\ \mathbf{v(t) = -a\omega\sin\omega t} \end{cases}$$

Calcul de l'énergie totale $E_T = E_c + E_p$:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}ma^2\frac{k}{m}\sin^2\omega t = \frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega t$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega t$$

D'où l'expression de l'énergie totale E_T :

$$E_T = \frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega t. \quad \text{Soit : } E_T = \frac{1}{2}ka^2 = \text{Cste}$$

On conclut que l'énergie totale est constante durant le mouvement du point matériel.

Remarque :

A partir de l'expression de l'énergie totale, on peut retrouver l'équation différentielle du mouvement et de là aboutir à l'équation horaire x(t) :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{Cste} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$$

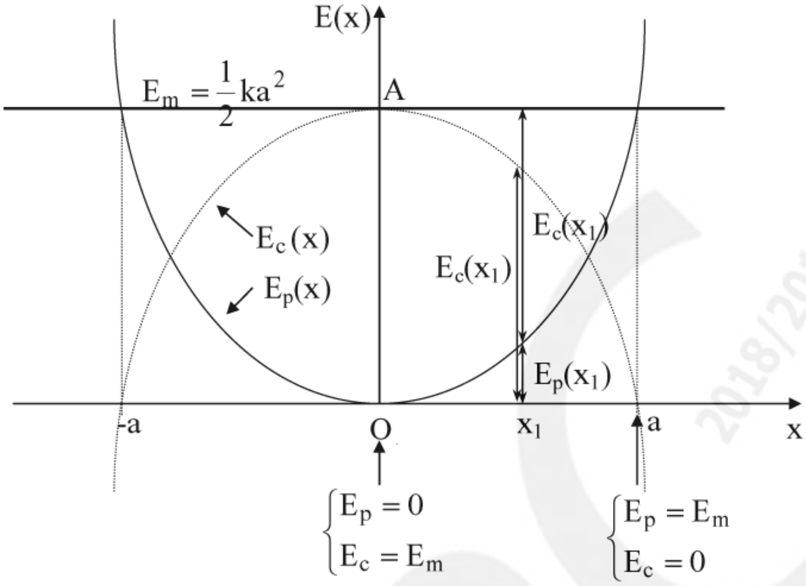
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{m\ddot{x} + kx = 0}$$

- **Représentation des énergies cinétique et potentielle en fonction de la position x :**

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$: c'est l'équation d'une parabole d'axe Oy de sommet O.

$$E_T = E_c + E_p = \text{cste} = \frac{1}{2}ka^2$$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}ka^2 - E_p = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kx^2$: c'est l'équation d'une parabole de sommet A, renversée par rapport à celle représentant $E_p(x)$, de sommet O.



On observe dans ce graphique un échange d'énergie : l'énergie cinétique perdue est convertie en énergie potentielle et vice-versa. La somme des deux énergies est constante au cours du temps et égale à $E_T = \frac{1}{2}ka^2$. C'est l'énergie maximale acquise par le ressort lors de l'élongation initiale égale à **a**. En O, a lieu l'état d'équilibre stable du système.

<u>Application 2</u> : Vitesse de libération d'un satellite.

La vitesse de libération est la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un satellite de masse m pour qu'il quitte l'attraction terrestre.

Le satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle qui est conservative donc l'énergie mécanique du satellite est constante : $E_m = E_c + E_p = \text{cste}$, soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = \text{Cste}$$

Pour trouver la vitesse de libération, calculons l'énergie mécanique de l'objet au temps initial et au temps final :

A l'instant initial, l'objet est à la surface de la Terre : son énergie mécanique est :

$$\frac{1}{2}mv_\ell{}^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = \text{Cste}$$

Pour trouver cette constante, calculons maintenant l'énergie totale à l'infini car on a supposé que l'objet a échappé à l'attraction terrestre :

A l'infini, l'énergie potentielle de l'objet est nulle car la variation de E_p est en 1/r. L'énergie potentielle a augmenté de $-\frac{GM_Tm}{R_T}$ à 0 ; par compensation, son énergie cinétique va diminuer de

$\frac{1}{2}mv_\ell^{\ 2}$ à 0, sa vitesse va donc s'annuler à l'infini. En conséquence, l'énergie totale est nulle à l'infini.

La conservation de l'énergie totale conduit à :

$$\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = 0$$

soit : $v_\ell = \sqrt{\frac{2G_TM}{R_T}}$

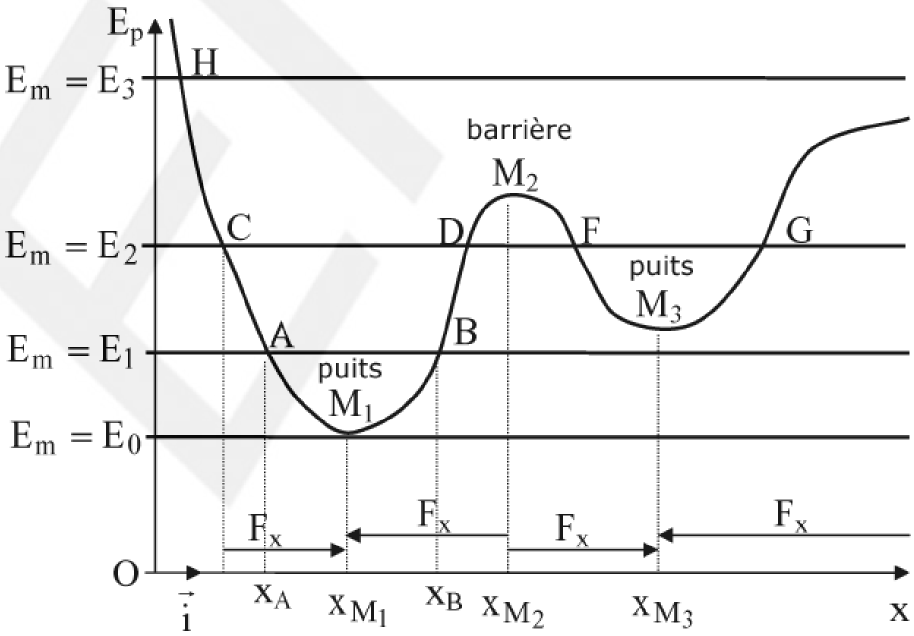
Avec : $G = 6{,}67.10^{-11}$U.S.I., $M_T = 5{,}972.10^{24}$kg , $R_T = 6371$km , on trouve : $v_\ell \approx 11{,}2$km/s .

IV.3- EQUILIBRE STABLE, EQUILIBRE INSTABLE

IV.3.1- CONDITIONS DE STABILITE

Considérons un point matériel M se déplaçant sur un axe x'Ox et soumis à une force conservative $\vec{F}(x)$ telle que la variation de son énergie potentielle $E_p(x)$ en fonction de la position est représentée ci-dessous. A partir de ce graphe, il s'agit d'étudier la nature de son mouvement et d'en caractériser ses particularités.

La force $\vec{F}$ étant conservative, on a : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{Grad}}\,E_p$, et puisque le problème posé est à une dimension : $F_x(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$. On en déduit que la force n'est autre que la pente de la courbe $E_p(x)$ avec un signe opposé.



L'unique composante F_x de $\vec{F}$ sur l'axe x'Ox est :

- Positive : $F_x = -\dfrac{dE_p}{dx} > 0 \Rightarrow \dfrac{dE_p}{dx} < 0 \Rightarrow x \in \left]0, x_{M_1}\right[\cup \left]x_{M_2}, x_{M_3}\right[$
- négative : $F_x = -\dfrac{dE_p}{dx} < 0 \Rightarrow \dfrac{dE_p}{dx} > 0 \Rightarrow x \in \left]x_{M_1}, x_{M_2}\right[\cup \left]x_{M_3}, +\infty\right[$
- ou nulle : $F_x = -\dfrac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dE_p}{dx} = 0$: ce qui correspond aux points x_{M_1}, x_{M_2} et x_{M_3} de la courbe où E_p est soit maximale, soit minimale (c'est-à-dire qu'il existe en ces points un extrémum). Les points x_{M_1}, x_{M_2} et x_{M_3} constituent des **positions d'équilibre**.

***Equilibre stable :** L'équilibre est stable aux positions x_{M_1} et x_{M_3} car :

$$\left.\frac{\mathbf{dE_p}}{\mathbf{dx}}\right|_{x_{M_1}, x_{M_3}} \mathbf{= 0 \;\; et \;\;} \left.\frac{\mathbf{d^2E_p}}{\mathbf{dx^2}}\right|_{x_{M_1}, x_{M_3}} \mathbf{> 0}.$$

***Equilibre instable :** L'équilibre est instable à la position x_{M_2} car :

$$\left.\frac{\mathbf{dE_p}}{\mathbf{dx}}\right|_{x_{M_2}} \mathbf{= 0 \;\; et \;\;} \left.\frac{\mathbf{d^2E_p}}{\mathbf{dx^2}}\right|_{x_{M_2}} \mathbf{< 0}.$$

IV.3.2- NATURE DU MOUVEMENT

Discutons maintenant de la nature du mouvement de M lorsque son énergie mécanique possède les valeurs suivantes: $E_m = E_o$, $E_m = E_1$, $E_m = E_2$ ou $E_m = E_3$:

1/ $\boxed{E_m = E_o}$: Cette valeur correspond à l'énergie potentielle minimale. Le point matériel M est et reste en équilibre. Il ne peut pas abandonner cette position, car son énergie cinétique est nulle.

2/ $\boxed{E_m = E_1}$:

- La droite E_1 coupe la courbe $E_p(x)$ aux points A et B.
- A gauche du point A et à droite du point B, $E_1 < E_p$, alors : $E_c = E_1 - E_p < 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, le mouvement du point M (ayant une énergie totale égale à E_1) ne peut avoir lieu qu'entre les positions x_A et x_B où $E_p \leq E_m$ et $E_c > 0$.

- Le mouvement de M est oscillant entre les abscisses x_A et x_B de telle façon que la vitesse de M s'y annule (E_c s'annule en x_A et x_B qu'on appelle points de rebroussements).
- Ce domaine $[x_A, x_B]$ est appelé « puits de potentiel » car le point matériel est contraint de se déplacer qu'entre ces points.

3/ $\boxed{E_m = E_2}$:

- Le point M ne peut osciller qu'entre les abscisses x_C et x_D ou entre les abscisses x_F et x_G.
- Les domaines $[x_C, x_D]$ et $[x_F, x_G]$ constituent des puits de potentiel. Si le point M est dans l'un ou l'autre domaine, il ne peut s'en échapper. Le domaine $[x_D, x_F]$ est un domaine interdit au point M car dans cet intervalle $E_p > E_2 \Rightarrow E_c < 0$. Ce domaine s'appelle « barrière de potentiel ».

4/ $\boxed{E_m = E_3}$: Le mouvement n'est plus oscillant. Le point M a assez d'énergie pour, à partir de la position x_H, aller jusqu'à l'infini.

IV.4- IMPULSION ET CHOCS

Jusqu'à présent, nous avons étudié du point de vue dynamique puis énergétique le mouvement d'un seul point matériel. Dans cette partie, nous allons nous intéresser et nous limiter au mouvement de deux points matériels (qu'on appellera par la suite particules) entrant en collision. Elles se percutent pendant un bref instant puis chacune, après le choc, va prendre, en général, une direction et une vitesse qu'il y a lieu de déterminer. Pour cela, on doit, au préalable, définir certaines grandeurs physiques qui vont nous permettre de poser correctement le problème et de le résoudre.

IV.4.1- IMPULSION

IV.4.1.1- Définition

Le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit pour une particule soumise à des forces extérieures dont la résultante est $\vec{F}_{ext}$: $\vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ où $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement de la particule de masse m et ayant une vitesse $\vec{v}$.

La variation instantanée de sa quantité de mouvement est : $d\vec{p} = \vec{F}_{ext}dt$.

On définit l'**IMPULSION** de la force $\vec{F}_{ext}$ appliquée à la particule, notée $\vec{I}$, par :

$$\vec{\mathbf{I}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{F}}_{ext}\mathbf{dt} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{d\vec{p}} = \vec{\mathbf{p}}(\mathbf{t_f}) - \vec{\mathbf{p}}(\mathbf{t_i}) = \underset{t_i \to t_f}{\Delta \vec{\mathbf{p}}}$$

Où t_i et t_f sont les temps de début et de fin de l'interaction avec la force $\vec{F}_{ext}$. L'impulsion est donc la variation de la quantité de mouvement de la particule durant cet intervalle de temps.

IV.4.1.2- Impulsion dans le cas de deux particules en interaction

La notion d'impulsion trouve son intérêt en particulier lors de l'étude des chocs entre particules. Considérons, dans un repère galiléen, deux particules de masses respectives m_1 et m_2. Avant le choc, leurs vitesses respectives sont $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Il s'agit de déterminer leurs vitesses $\vec{v}_1\,'$ et $\vec{v}_2\,'$ après le choc.

*Considérons la particule 1 seule :

Admettons que la seule force qui agit dessus provient de la particule 2. Cette force, notée $\vec{F}_{21}$, est considérée comme une force extérieure pour la particule 1. Appliquons le Principe Fondamental de la Dynamique à la particule 1 : $\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$, avec $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ la quantité de mouvement de la particule 1 et $\vec{F}_{21}$ la force exercée sur la particule 1 pendant la durée du choc.

Par définition, l'impulsion reçue par la particule 1 de la part de la particule 2 est :

$$\vec{I}_{21} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}dt = \underset{t_i \to t_f}{\Delta \vec{p}_1} = m_1\vec{v}_1\,' - m_1\vec{v}_1$$

*Considérons la particule 2, seule :

Comme précédemment, on considère que la seule force appliquée à la particule 2, provient de la particule 1, notée $\vec{F}_{12}$. On a :

$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$, avec $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ la quantité de mouvement de la particule 2 et $\vec{F}_{12}$ la force exercée sur la particule 2 pendant la durée du choc.

Et l'impulsion reçue par la particule 2 de la part de la particule 1 est :

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}dt = \underset{t_i \to t_f}{\Delta \vec{p}} = m_2\vec{v}_2\,' - m_2\vec{v}_2$$

*Considérons maintenant le système noté (Σ) constitué des deux particules :

Le système constitué par les deux particules est isolé car les seules forces en présence sont $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$ qui sont telles que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ d'après la 3ème loi de Newton (Principe de l'action et de la réaction).

La quantité de mouvement totale du système est : $\vec{p}(\Sigma) = \vec{p}_{tot.} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et sa variation instantanée est :

$$\frac{d\vec{p}_{tot.}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}\text{, soit : } \boldsymbol{\frac{d\vec{p}_{tot.}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{tot.} = \overrightarrow{Cste}}$$

Il y a donc conservation de la quantité de mouvement totale du système de particules.

THEOREME DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SYSTEME DE PARTICULES:

Dans un repère galiléen, la quantité de mouvement totale d'un système isolé de points matériels se conserve.

Exemple 1 :

On tire une balle de masse m avec un fusil de masse M. La balle sort du canon avec une vitesse $\vec{v}_o$ (après le choc avec le percuteur).

On écrit la quantité de mouvement totale avant et après le tir :

Avant le tir : les vitesses du fusil et de la balle sont nulles, donc : $\vec{p}_{tot.}^{avant} = \vec{0}$.

Après le tir : Posons $\vec{v}$ la vitesse du fusil : $\vec{p}_{tot.}^{après} = m\vec{v}_o + M\vec{v}$.

Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{p}_{tot.}^{avant} = \vec{p}_{tot.}^{après} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{m}{M}\vec{v}_o$.

Conclusion : le fusil recule.

Exemple 2 :

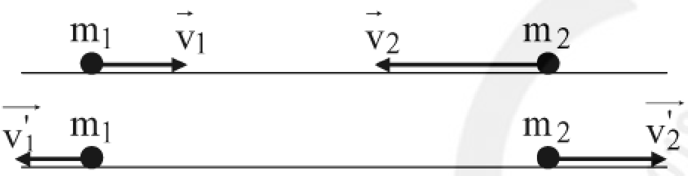
Principe de fonctionnement du moteur à réaction dont sont dotés les avions et les fusées : le moteur propulse un gaz **vers l'arrière**. Par réaction, le gaz transmet une poussée à l'appareil vers **l'avant** de telle sorte que la quantité de mouvement totale des gaz vers l'arrière est égale, en module, à la quantité de mouvement de l'appareil vers l'avant.

IV.4.2- CHOCS ENTRE DEUX PARTICULES

Lorsque deux particules entre en collision, durant un bref intervalle de temps, il y a échange de quantité de mouvement et d'énergie : après le choc, les particules changent généralement de vitesses et de directions. Selon la nature des particules, différents cas peuvent se présenter :

IV.4.2.1- Choc parfaitement élastique

Les caractéristiques physiques des matériaux dont sont faites les particules, sont telles qu'aucune déformation n'a lieu après le choc. Il y a conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale avant et après le choc (choc entre deux boules d'**acier**, d'**ivoire** ou de **verre incassable**). Considérons deux particules de masses respectives m_1 et m_2 entrant en collision frontale. Le système, noté (Σ), est considéré comme <u>isolé</u>.



<u>Avant le choc</u> : pour la masse m_1 : $\vec{v} = \vec{v}_1$; pour la masse m_2 : $\vec{v} = \vec{v}_2$.

<u>Après le choc</u> : pour la masse m_1 : $\vec{v} = \vec{v}'_1$; pour la masse m_2 : $\vec{v} = \vec{v}'_2$.

*Le système étant isolé, sa quantité de mouvement demeure constante : $\vec{p}(\Sigma) = \overrightarrow{cste}$ ou $\Delta\vec{p}(\Sigma) = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{p}_{av.choc} = \vec{p}'_{ap.choc} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow \mathbf{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2} \quad (1)$$

*Conservation de l'énergie cinétique (choc élastique) :

$$\Delta E_c = 0 \Rightarrow E_c(\Sigma)_{av.choc} = E_c(\Sigma)_{ap.choc}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}'^2_1 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}'^2_2} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) \\ (2) \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1^2 - \vec{v}'^2_1\right) = \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}'^2_2 - \vec{v}_2^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_2$$

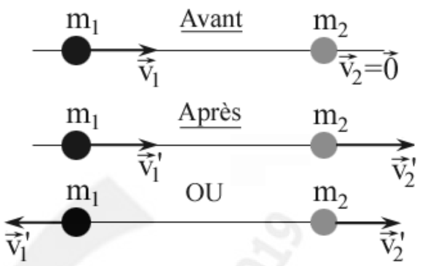
$$\left\{\begin{array}{l} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{\vec{v}'_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}} \\ \mathbf{\vec{v}'_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}} \end{array}\right.$$

<u>Cas particuliers</u> :

1/ si $\mathbf{m_1 = m_2}$, on trouve $\vec{v}'_1 = \vec{v}_2$ et $\vec{v}'_2 = \vec{v}_1$, ce qui signifie que les particules « échangent » leur vitesse.

2/ Si la masse m_2 est initialement au repos : $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} = \vec{\mathbf{0}}$:

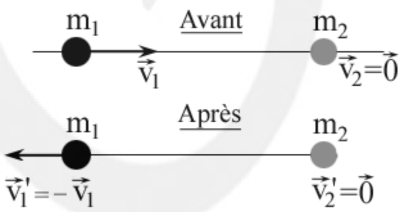
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}'_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}'_2 = \dfrac{2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



<u>Cas particuliers</u> :

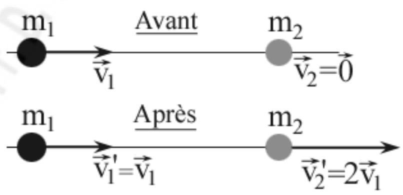
* Si $m_1 << m_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} \to 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}'_1 = \dfrac{m_2\left(\dfrac{m_1}{m_2} - 1\right)}{m_2\left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right)}\vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 = \dfrac{2m_1}{m_2\left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right)}\vec{v}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 = 2\dfrac{m_1}{m_2}\vec{v}_1 = \vec{0} \end{cases}$$



* Si $m_1 >> m_2 \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1} \to 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}'_1 = \dfrac{m_1\left(1 - \dfrac{m_2}{m_1}\right)}{m_1\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)}\vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 = \dfrac{2m_1}{m_1\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)}\vec{v}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 = 2\vec{v}_1 \end{cases}$$



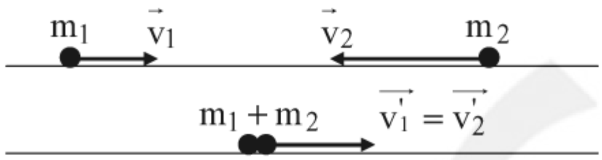
IV.4.2.2- Choc parfaitement inélastique ou choc mou

Après le choc, les particules restent collées l'une à l'autre et repartent ensemble avec la même vitesse (choc entre deux boules de **terre glaise**, de **cire molle** ou même de **plomb**). On observe une déformation de l'une ou des deux particules. Il y a toujours conservation de la quantité de mouvement totale mais pas de l'énergie cinétique. On observe une perte ou dissipation d'énergie.

Considérons deux particules de masses respectives m_1 et m_2 entrant en collision frontale. Le système, noté (Σ), est considéré comme <u>isolé</u>.

Avant le choc : pour la masse m_1 : $\vec{v} = \vec{v}_1$; pour la masse m_2 : $\vec{v} = \vec{v}_2$.

Après le choc : pour les masses ($m_1 + m_2$) : $\vec{v} = \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$.



*Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'_1 \Rightarrow \mathbf{\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}}$$

*Energie cinétique totale avant collision : $E_c = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2$

* Energie cinétique totale après collision : $E_c^{'} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2_1$

$$E_c^{'} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2_1 = \frac{1}{2(m_1 + m_2)}\left\{m_1^2\vec{v}_1^2 + m_2^2\vec{v}_2^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right\}$$

$$E_c^{'} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| \cos\pi = -\|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| < 0$$

On en déduit que :

$$\mathbf{E_c^{'} \le \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 < \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 \Rightarrow E_c^{'} < E_c}$$

L'énergie cinétique a diminué. Donc, il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique : une partie de l'énergie cinétique a été convertie en énergie thermique (chaleur) :

$$\Delta E_c = E_{c,finale} - E_{c,initiale} = E_c^{'} - E_c < 0$$

*Calcul de ΔE_c :

$$\Delta E_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \left(\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2\right)$$

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right)$$

Après simplification, on trouve : $\mathbf{\Delta E_c = -\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}$

$\Delta E_c < 0$: c'est la quantité d'énergie cinétique perdue.

IV.4.2.3- Choc inélastique ou partiellement élastique

Après le choc, les particules repartent mais on observe une déformation de l'une des particules ou des deux. Il y a toujours conservation de la quantité de mouvement totale mais avec une dissipation de l'énergie cinétique.

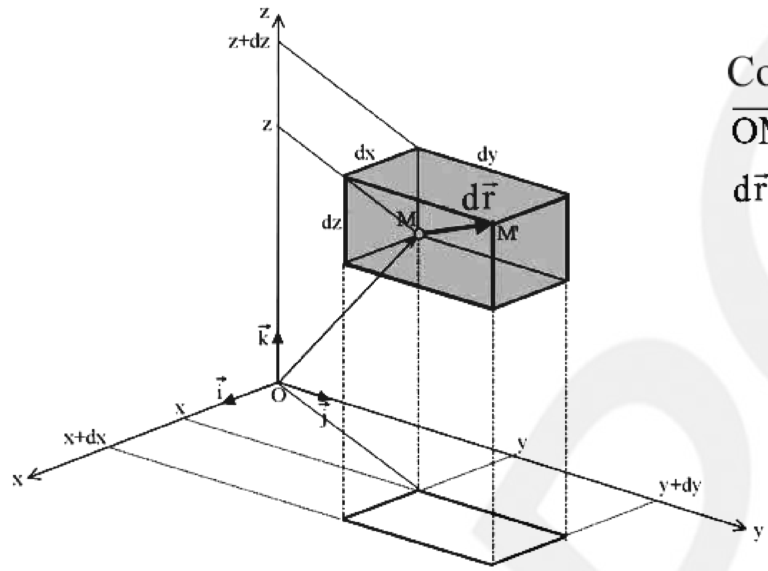
On définit, dans le cas d'un choc frontal, un coefficient de restitution noté **e** : $e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$ où :

v_1 et v_2 sont les vitesses avant le choc et v_1' et v_2' les vitesses après le choc.

<u>Remarque</u> : Si $e = 1$, le choc est parfaitement élastique et si $e = 0$, le choc est parfaitement inélastique.

ANNEXE

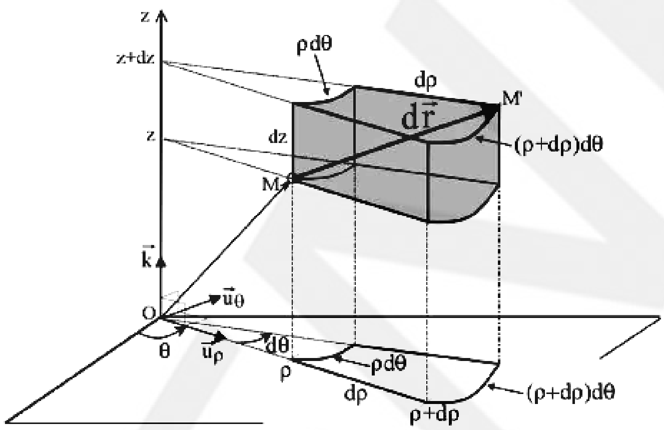
ELEMENTS DE DEPLACEMENT
dans les différents systèmes de coordonnées



Coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

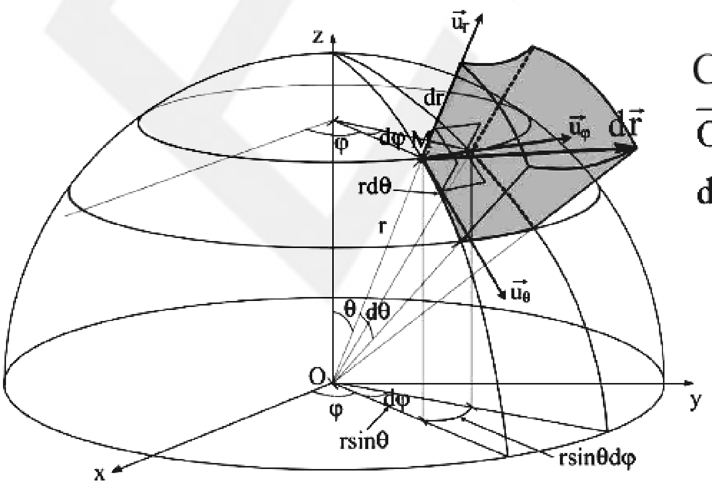
$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$



Coordonnées cylindriques

$\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}_\rho+z\vec{k}$

$d\vec{r} =d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\theta\vec{u}_\theta+dz\vec{k}$



Coordonnées sphériques

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$