SOMMAIRE

# CHAPITRE III- Dynamique du point matériel

# III- Dynamique du point matériel

## III.1- INTRODUCTION

Le chapitre précédent a concerné la cinématique du point matériel, c'est-à-dire la description du mouvement d'un point (position, vitesse et accélération) et ce, dans différents systèmes de coordonnées. Ce chapitre, la dynamique du point matériel, va s'intéresser aux causes ou **actions** qui engendrent le mouvement. Ces actions, appelées « forces », sont appliquées au point matériel. La dynamique du point matériel dans le cadre de la mécanique classique, est basée sur les lois de Newton qui permettent de relier les forces et les éléments de cinématique (vitesse et accélération). Ces lois sont valides dans des référentiels privilégiés appelés « référentiels d'inertie » ou « référentiels galiléens ».

## III.2- REFERENTIELS D'INERTIE OU GALILEENS

### III.2.1- DEFINITION

Un référentiel d'inertie ou galiléen est un référentiel pour lequel un point matériel de masse **m** isolé (c'est-à-dire qui n'est soumis à aucune force) est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme. Tout autre référentiel au repos, ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie, est également un référentiel d'inertie (voir chapitre sur mouvement relatif).

### III.2.2- REFERENTIELS D'INERTIE APPROCHES

Rigoureusement, il n'existe pas dans l'espace absolu un référentiel galiléen. On ne peut que proposer certains référentiels approchés qui sont considérés comme galiléens à différents degrés, le meilleur étant celui de Copernic. Selon les expériences réalisées, on choisira d'étudier les mouvements dans l'un ou l'autre des repères suivants :

#### a/ Référentiel de Copernic :

C'est un référentiel dont l'origine est le centre de gravité (ou centre de masse ou centre d'inertie) du système solaire et les axes dirigés vers trois étoiles très lointaines et donc assimilées à des points fixes dans l'espace.

La Voie Lactée est la galaxie dans laquelle se situe le système solaire (elle contient environ 250 milliards d'étoiles dont le Soleil). Elle est en rotation autour de son centre de masse appelé centre galactique. La période de révolution du Soleil autour du centre galactique étant de 226 millions d'années, on peut donc largement considérer, à l'échelle de la vie d'un observateur humain, le référentiel de Copernic comme pratiquement immobile dans l'espace. Il se prête bien pour l'étude des planètes du système solaire et du mouvement des sondes spatiales.

**b/ Référentiel de Kepler (ou référentiel héliocentrique) :**

C'est un référentiel dont l'origine est le centre de gravité du Soleil et les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic (*Ex. : Etude du mouvement des planètes autour du Soleil*).

Comme le référentiel de Copernic, on peut le considérer comme galiléen avec une très bonne précision.

**c/ Référentiel géocentrique :**

Son origine est le centre de gravité de la Terre et ses axes sont toujours dirigés vers trois étoiles très éloignées qui semblent fixes. (*Ex. : Etude du mouvement des satellites autour de la Terre*).

Ce repère peut être considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est très courte devant une année : la révolution de la Terre autour du Soleil n'est alors pas prise en compte.

**d/ Référentiel terrestre :**

Son origine est un point quelconque de la Terre et ses axes sont solidaires de son mouvement de rotation.

Il est considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est très petite devant la période de rotation de la Terre autour d'elle-même (très inférieure à une journée). Par exemple, étude de la chute d'une pierre du $20^{ème}$ étage d'un bâtiment.

Remarque : Ce n'est plus le cas si l'on étudie le mouvement d'un objet éjecté d'un avion situé par exemple à 10 km de la surface de Terre, car alors on doit tenir compte du mouvement de rotation de la Terre.

## III.3- LES POSTULATS DE LA MECANIQUE CLASSIQUE (1685)

La mécanique classique repose sur les lois de Newton. Dans le cadre de cette théorie, il est nécessaire de définir certaines hypothèses qui permettent d'aborder convenablement les problèmes de la mécanique classique. Pour cela, il faut poser les postulats de la notion de temps, d'espace et de masse, valables dans les référentiels galiléens ou inertiels.

Le temps : le temps de Newton s'écoule d'une façon identique d'un référentiel à l'autre. On dit que le temps est **absolu**, c'est-à-dire qu'il est le même partout dans l'Univers ou encore que toutes les horloges de l'Univers sont synchrones. Par ailleurs, le temps est **homogène**, c'est-à-dire que les lois de la physique sont invariantes par translation dans le temps. On dit également que le temps s'écoule uniformément.

L'espace : il est **absolu**, c'est-à-dire qu'il est le même pour tous les observateurs. Il est **homogène**, c'est-à-dire que les lois de la physique sont invariantes par translation de l'espace. Il est aussi **isotrope**, c'est-à-dire que les lois de la physique sont invariantes par rotation de l'espace autour d'un point.
La masse : Tout objet possède une masse qui définit la quantité de matière contenue dans cet objet. C'est une constante positive qui lui est caractéristique. Elle reste invariante en mécanique classique.

## III.4- LES LOIS DE NEWTON

Elles sont au nombre de trois. Rappelons que des lois (ou principes) sont des relations qui ont été établies à partir de l'expérience. Elles ne se démontrent pas. Tant que l'on ne trouve pas une expérience qui les contredise, elles sont considérées comme valides dans les limites des postulats de la théorie. La mécanique classique s'applique aux objets dont la vitesse est très inférieure à celle de la lumière (autrement, il faut faire appel à la Relativité d'Einstein) et dont la taille est notablement supérieure à celle de l'atome (sinon, c'est la mécanique quantique qu'on utilise).
*Attention ! Ne pas confondre le point matériel, sans dimension, qui est une modélisation mathématique d'un objet, avec une particule élémentaire qui, elle, a une dimension mais très petite.*

### III.4.1- LA PREMIERE LOI DE NEWTON : LE PRINCIPE D'INERTIE.

**Définition de l'inertie :** L'inertie est la tendance naturelle d'un objet à conserver son mouvement, c'est-à-dire à résister à un changement de vitesse ou d'orientation.
**Enoncé :** Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un corps est n'est soumis à aucune force (corps isolé) ou soumis à des forces qui se compensent (corps pseudo-isolé), alors il est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Remarque : Physiquement, ces deux états sont équivalents : ils correspondent tous deux à une accélération nulle. Pour tout objet qui se déplace en mouvement rectiligne uniforme, on peut toujours trouver un référentiel par rapport auquel l'objet est immobile, ce qui explique l'équivalence de ces deux états physiques. En fait, il n'y a aucune raison de privilégier un repère (fixe) plutôt que l'autre (en mouvement rectiligne uniforme).

### III.4.2- LA DEUXIEME LOI DE NEWTON : LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (P.F.D.).

**a/ Définition de la force :** une force peut être définie comme une action qui entraîne l'accélération du point matériel, autrement dit qui modifie sa vitesse, en module et/ou en direction. La force a toutes les caractéristiques d'un vecteur.

La 2ème loi de Newton relie la résultante des forces extérieures appliquées au point matériel à son accélération.

**b/ Enoncé :** Dans un référentiel galiléen (Rg), la résultante des forces extérieures s'appliquant à un point matériel est proportionnelle à son vecteur accélération, le coefficient de proportionnalité étant sa masse **m**.

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{m}\vec{\gamma}(\mathbf{M})_{/(\mathbf{Rg})}$$

UNITES : Dans le Système International (S.I.), l'accélération est en ($m.s^{-2}$), la masse en (kg) et la force en Newton (N).

Remarques :

1/ Pour le point matériel considéré seul, toutes les forces considérées sont extérieures au point. On fera la distinction entre forces intérieures et forces extérieures, par exemple, pour les systèmes de points matériels.

2/ Le principe fondamental de la dynamique est une **relation vectorielle**.

### III.4.3- LA TROISIEME LOI DE NEWTON : LE PRINCIPE DE L'ACTION ET DE LA REACTION

**Enoncé :** Lorsqu'un corps A agit sur un corps B avec une force $\vec{F}_{A\to B}$, alors le corps B agit sur le corps A de façon réciproque, avec une force $\vec{F}_{B\to A}$ qui a même direction, même module mais un sens opposé :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}$$

### III.4.4- METHODE DE RESOLUTION DES PROBLEMES DE DYNAMIQUE PAR LE P.F.D.

La résolution d'un problème de dynamique en mécanique classique s'effectue selon les étapes suivantes :

1/ Rechercher l'ensemble des forces extérieures appliquées au point matériel (faire le bilan des forces).

2/ Ecrire la force résultante $\vec{F}$ et l'égaler à $m\vec{\gamma}$ : $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}$.

3/ Choisir le repère le mieux adapté au problème (où les calculs seront simplifiés) : cartésien, polaire, cylindrique, intrinsèque ou sphérique.

4/ Projeter $\vec{F}$ et $\vec{\gamma}$ sur les axes du repère choisi. On obtient un système d'équations différentielles.

5/ Poser les conditions initiales sur la position et la vitesse du point matériel (pour obtenir une solution unique au problème considéré) puis résoudre ces équations. On obtient les équations horaires du mouvement du point matériel.

Par exemple, en choisissant un repère cartésien, la projection de $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ donne le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} F_x = m\gamma_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\gamma_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\gamma_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

En général, $\vec{F}$ peut dépendre de la position (cas de la force de rappel du ressort agissant sur un corps : $\vec{F} = -k\vec{x}$ ) ou de la vitesse (cas de la force de frottement due à l'air, appliquée à un corps durant sa chute: $\vec{F} = -k\vec{v}$ ) ainsi qu'explicitement du temps t . On écrit généralement le système sous la forme :

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{x} \\ F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{y} \\ F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{z} \end{cases}$$

## III.5- LES FORCES DANS LA NATURE

On distingue les forces agissant à distance et les forces de contact.

### III.5.1- LES FORCES A DISTANCE

Les forces à distance peuvent s'exercer sans que les corps ne soient en contact. Parmi ces forces, on distingue principalement :

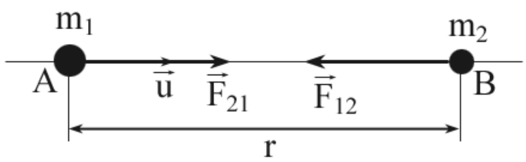
**a/ La force de gravitation :**

Loi de l'attraction universelle (Newton): « Deux corps de masse $\mathbf{m_1}$ et $\mathbf{m_2}$ s'attirent avec des forces de même intensité, de sens opposés, proportionnelles au produit des masses et inversement proportionnelles au carré de la distance qui les sépare. Ces forces ont pour support la droite passant par les centres de gravité de ces deux corps » :

On exprime la force de gravitation $\vec{F}_{12}$, action de la masse $\mathbf{m_1}$ sur la masse $\mathbf{m_2}$ , par la relation vectorielle :

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$$




où :

G : est la constante gravitationnelle, G= $6{,}67384.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$ dans le système international (S.I.).

$\vec{u}$ : vecteur unitaire de $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ : $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Prenons $\mathbf{m_1 = M}$ la masse de la Terre et $\mathbf{m_2 = m}$ la masse d'un objet situé à la distance **r** du centre de la Terre dans le référentiel géocentrique (repère galiléen).

Si cet objet est assez proche de la surface de la Terre, on appelle POIDS de l'objet, La force exercée par la Terre sur cet objet soit :

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u} = m\vec{g}$$

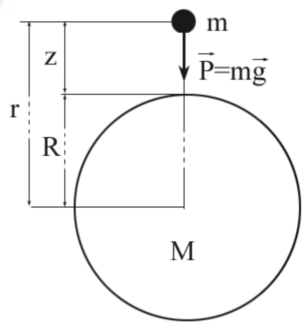
où : $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$ est le champ gravitationnel (ou d'attraction) de la Terre ou l'accélération de la pesanteur.

- Au voisinage de la surface de la Terre, $r \approx R$, rayon de la Terre.

  $\|\vec{g}_o\| = g_o = \frac{GM}{R^2} = 9{,}8 m/s^2$.

  Avec : Masse de la Terre : M = $5{,}9742.10^{24}$ kg,

  Rayon de la Terre : R= $6{,}371.10^6$ m




- La masse **m** située à une hauteur **z** de la surface de la Terre : $r = R + z$.

$$g(z) = \frac{GM}{(R+z)^2} = \frac{GM}{R^2} \times \frac{R^2}{(R+z)^2} = g_o\left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2}$$

Sachant que $\frac{z}{R} << 1$, on fait le développement limité suivant considéré en première approximation :

$(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, avec $\varepsilon << 1$, soit :

$g(z) \approx g_0\left(1 - \frac{2z}{R}\right)$ : C'est la variation du champ gravitationnel **g** avec la distance **z** de la surface de la Terre : **g** diminue quand on s'éloigne de la surface de la Terre.

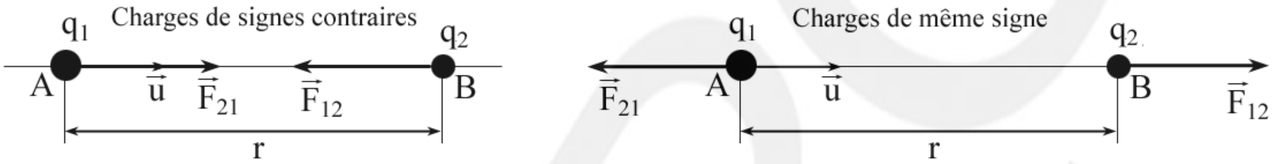
**b/ La force électrique :** elle s'applique aux particules possédant une charge électrique.

Loi de Coulomb : « Deux charges électriques ponctuelles $\mathbf{q_1}$ et $\mathbf{q_2}$ au repos exercent l'une sur l'autre des forces électrostatiques dont l'intensité est proportionnelle aux produits des deux charges et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux charges, ces forces étant portées par la droite passant par les deux charges. Elles sont attractives si les charges sont de signes contraires et répulsives si les charges ont le même signe ».

On exprime $\vec{F}_{12}$, l'action de la charge $\mathbf{q_1}$ sur la charge $\mathbf{q_2}$ , par la relation vectorielle :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{12}} = \mathbf{K}\frac{\mathbf{q_1 q_2}}{\mathbf{r^2}}\vec{\mathbf{u}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{21}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{12}}$$




où : K est une constante : $K \approx 9.10^9$ U.S.I.

$\vec{u}$ : vecteur unitaire de $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ : $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.

**c/ La force électromagnétique :** elle provient des charges électriques en mouvement.

Force de Lorentz ou force électromagnétique : une charge électrique ponctuelle $q$ placée dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ et se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel galiléen, est soumise à l'action de deux forces : une force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$ indépendante de la vitesse, et d'une force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ liée à la vitesse de la charge. La force de Lorentz s'écrit alors :

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}).$$

**d/ Les forces nucléaires :** L'interaction nucléaire forte assure la stabilité des atomes en maintenant la cohésion des nucléons (protons et neutrons). Elles sont de portée très faibles, de l'ordre du femto $(1\,\text{fm} \equiv 1\,\text{femto} = 10^{-15}\text{m})$. Il existe aussi l'interaction faible responsable de la radioactivité $\beta$ (Un neutron se transforme en proton ou *vice versa*).

A noter que ces interactions constituent les interactions fondamentales de la nature avec l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique.

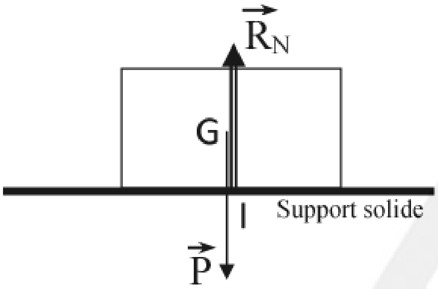
### III.5.2- LES FORCES DE CONTACT

Elles se manifestent lorsqu'un corps est en contact avec un autre corps (solide, liquide ou gazeux).

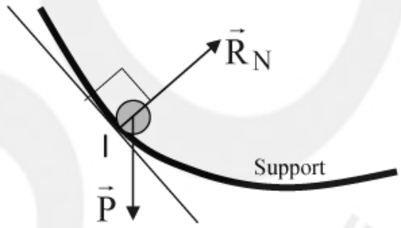
**1/ Réaction normale d'un support solide**

Un corps de masse **m** est posé sur un support solide horizontal, par exemple, une table (figure 1). Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est appliqué à son centre de gravité G et normal à la surface de la table. En vertu du principe de l'action et de la réaction, la table exerce une force égale et opposée à $\vec{P}$ : $\vec{R}_N = -\vec{P}$, soit en module : $\|\vec{R}_N\| = \|\vec{P}\| = mg$ .

Pour un support curviligne parfaitement lisse, sa réaction sur l'objet est normale à la tangente au support au point de contact I (figure 2).




(Figure 1)




(Figure 2)

**2/ Force de frottement**

Ces forces apparaissent entre les corps matériels en mouvement relatif les uns par rapport aux autres. On distingue deux types de frottement : les frottements solides et les frottements visqueux.

**a/ Le frottement solide :**

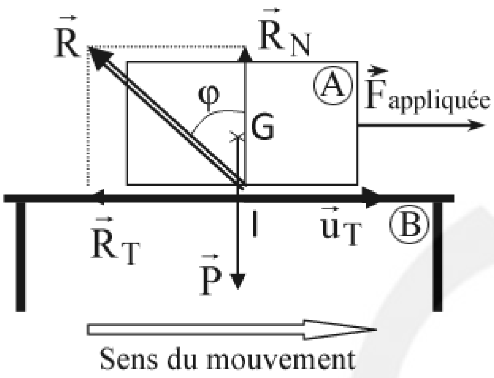
Deux corps solides A et B présentant une certaine rugosité sont en contact. Le corps B (le support) exerce sur le corps A une force $\vec{R}$ (appelée réaction) composée d'une réaction normale $\vec{R}_N$ (à la surface de contact) et d'une réaction tangentielle $\vec{R}_T$ dite <u>force de frottement</u> qui s'oppose au mouvement. L'expérience montre que le module de cette dernière est proportionnel au module de la force de réaction normale $\vec{R}_N$ (Loi de Coulomb) : $\|\vec{R}_T\| \propto \|\vec{R}_N\|$.

On définit le coefficient de frottement $\mu$ de la manière suivante :

$$\mu = tg\varphi = \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \text{ avec : } \varphi = (\vec{R}_N, \vec{R})$$

<u>Remarque</u> : $\mu$ n'a pas de dimension (sans unité).

La réaction totale du support solide sur l'objet est : $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$




N.B. : *Dans la suite, nous noterons la force de frottement par* $\vec{f}$ *et la réaction normale par* $\vec{N}$.

On définit deux types de frottement solide :

- <u>Le frottement solide statique</u> : Pour faire glisser A sur B, il faut que la force appliquée sur A ait une certaine valeur au-dessous de laquelle il reste encore immobile. La force de frottement limite qui équilibre la force motrice et empêche le mouvement de A est alors maximale. On l'appelle <u>force de frottement statique</u> à laquelle correspond le **coefficient de frottement statique** noté $\boldsymbol{\mu_s}$ et l'on a :

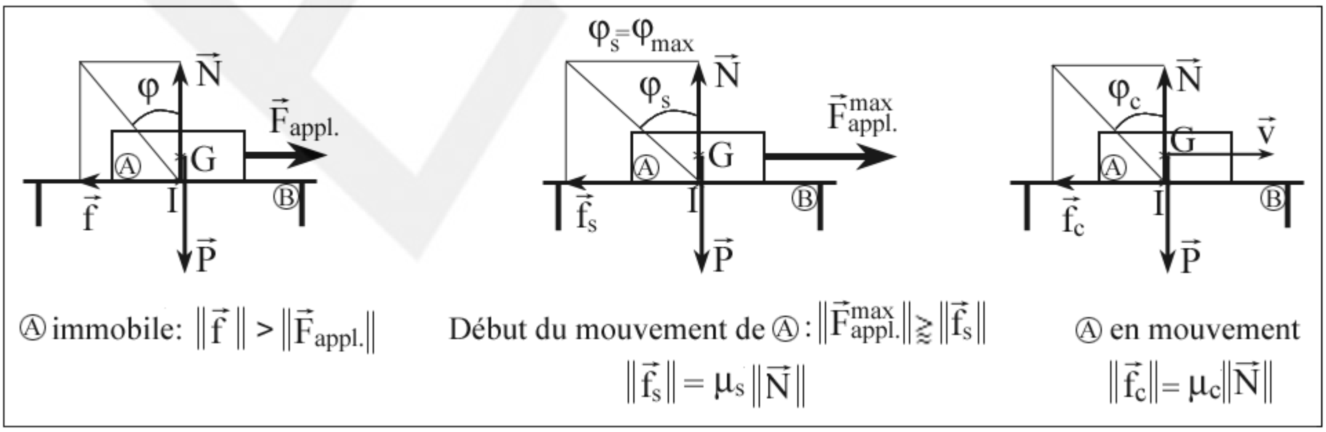
$$\|\vec{f}\|_{max} = \|\vec{f}_s\| = \mu_s \|\vec{N}\| \text{ avec } \mu_s = \operatorname{tg}\varphi_{max} = \frac{\|\vec{f}\|_{max}}{\|\vec{N}\|}$$

- <u>Le frottement solide cinétique</u> :

  Dès que le corps A commence à glisser sur le support B, la force de frottement diminue jusqu'à une valeur $\|\vec{f}_c\| = \mu_c \|\vec{N}\|$, appelée <u>force de frottement cinétique</u> (approximativement constante), $\boldsymbol{\mu_c}$ étant le **coefficient de frottement cinétique** qui est donc inférieur à $\mu_s$ : $\boldsymbol{\mu_c < \mu_s}$.

  La force de frottement cinétique est opposée au sens du mouvement et est tangente à la trajectoire :

$$\boldsymbol{\vec{f}_c = -\mu_c \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$



Remarques :

**1/ * *La condition de contact entre le corps A et le support solide B est N > 0.***

****Si N = 0, le corps A quitte le support solide B (il n'y a plus de contact).***

**2/** Pour diminuer le frottement solide, on utilise des « lubrifiants », donc on favorise le glissement (le coefficient de frottement diminue).

Au contraire, par exemple dans le cas des pneus d'une voiture en contact avec la route, pour augmenter l'adhérence, il faut que le frottement soit élevé : bon état des pneus (neufs) et de la route (rugueuse et propre). On évite ainsi le « patinage » et le dérapage !

**3/** En général, le coefficient de frottement statique $\mu_s$ est inférieur à 1 sauf dans quelques cas (contact argent/argent, aluminium/aluminium,…).

Quant au coefficient de frottement cinétique $\mu_c$, il est inférieur d'environ 50 à 70% de $\mu_s$.

**b/ Le frottement visqueux :**

Lorsque le mouvement d'un corps solide se produit dans un liquide (exemple : l'eau) ou dans un gaz (exemple : l'air), le frottement est appelé « frottement visqueux ». Dans le cas où la vitesse $\vec{v}$ de l'objet est relativement faible, l'expression de la force de frottement visqueux qui s'oppose au mouvement du solide est : $\vec{f} = -K\eta\vec{v}$ où :

K : est une constante qui dépend de la forme de l'objet (Unité : m)

$\eta$ : est le coefficient de viscosité du milieu (unité : N.m$^{-2}$.s ou Pa.s)

Exemple : pour un objet de forme sphérique dans un milieu de viscosité $\eta$, la force de frottement subit par l'objet au contact du milieu est donnée par la **loi de Stockes** : $\vec{f} = -6\pi R\eta\vec{v}$.

Remarques :

1/ Pour les vitesses faibles (de l'ordre de quelques cm/s), la force de frottement visqueux est souvent notée $\vec{f} = -\mu\vec{v}$, avec $\mu$ : coefficient de frottement visqueux (UNITE S.I. : kg.s$^{-1}$).

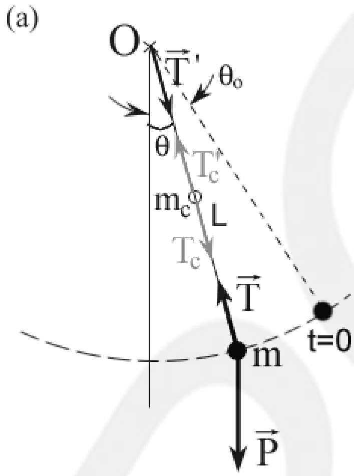
2/ Pour les vitesses relativement élevées (de l'ordre de quelques m/s), la force de frottement s'exprime plutôt en $v^2$ : $f = kv^2$ où k est un coefficient qui dépend du milieu, et de la forme et de l'aérodynamicité de l'objet.

**3/ La tension d'une corde**

La tension est la force exercée par une corde, un câble, etc. sur un objet qui lui est attaché. Cet objet peut être suspendu à la verticale et osciller (pendule) (fig. a) ou bien se déplacer sur un plan horizontal (fig. b) (ou incliné). Si la corde est inextensible et de masse négligeable, cette tension est la force exercée par chaque partie de la corde sur la partie voisine et a même valeur en chacun de ses points. On dit que la tension $\vec{T}$ se propage le long de la corde jusqu'à l'objet.

APPLICATIONS : Dans les deux exemples suivants, calculons la tension de la corde.

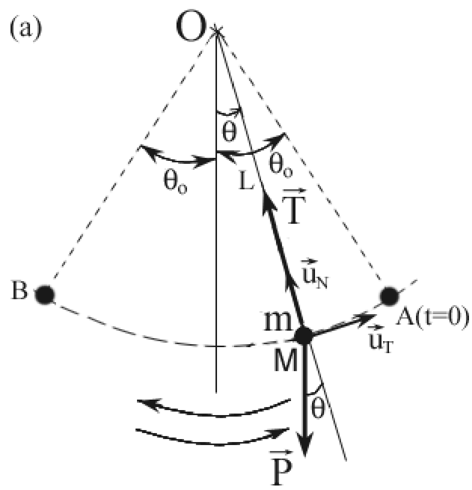
**Figure (a) :**




La corde, de longueur L, est fixée en un point O. A l'autre extrémité, est attachée une masse m sur laquelle est exercée une tension $\vec{T}$ (en plus du poids $\vec{P}$) ; au point de fixation O, existe une tension $\vec{T}'$. Sur un élément de corde de masse $m_c$ , d'après la 3$^{ème}$ loi de Newton, sont appliquées deux forces $\vec{T}_c$ et $\vec{T}_c'$ qui sont telles que $\|\vec{T}\| = \|\vec{T}_c\|$ et $\|\vec{T}'\| = \|\vec{T}_c'\|$. Appliquons le PFD à cet élément de masse : $m_c\vec{\gamma} = \vec{T}_c + \vec{T}'_c$. Si l'on considère la corde de masse négligeable ($m_c$ = 0) devant la masse m, alors : $\vec{T}_c + \vec{T}'_c = \vec{0}$, donc, $\|\vec{T}_c\| = \|\vec{T}_c'\|$ et l'on en déduit que $\|\vec{\mathbf{T}}\| = \|\vec{\mathbf{T}}'\|$ ; **c'est le résultat pour une corde dont la masse est négligeable.**

**Calcul de la tension T :**

Appliquons le PDF au système dans le repère intrinsèque $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ en considérant la configuration où le pendule se déplace de gauche à droite sur un arc de cercle de centre O et de rayon L ($\vec{u}_T$ dans le sens du déplacement, donc de $\vec{v}$) : à l'instant initial, la masse m est en A et elle est lâchée sans vitesse initiale. La position θ de la figure correspond au mouvement suivant : la masse est lâchée de A, va jusqu'en B et revient en M. Les conditions initiales sont donc :




$$\text{A } t = 0,\ \theta = \theta_{max} = \theta_o \text{ et } v = 0.$$

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{\gamma}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_T: -mg\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt}=m\dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=m\dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{v}{L} & (1)\\ \vec{u}_N: T-mg\cos\theta=\dfrac{mv^2}{L} & (2)\end{cases}$$

Ici, $v=\|\vec{v}\|=\dot{s}=L\dot{\theta}$

$(1)\Rightarrow vdv=-gL\sin\theta d\theta\Rightarrow v^2=2gL\cos\theta+C$

Appliquons les conditions initiales, on trouve : $C=-2gL\cos\theta_o$ et donc : $v^2=2gL(\cos\theta-\cos\theta_o)$

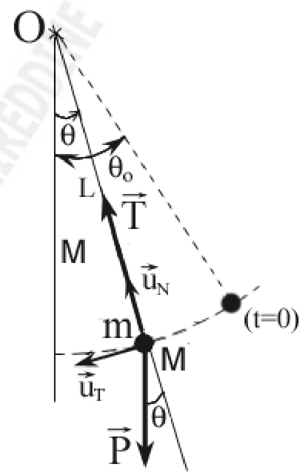
De la relation (2), on obtient : $\mathbf{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_o)}$

Remarque :

*En coordonnées intrinsèque, on a défini $\vec{u}_T$ ainsi : $\vec{v}=v\vec{u}_T$ donc dans cette expression $v$ (module de $\vec{v}$) est une quantité toujours positive et $\vec{u}_T$ dans le sens du mouvement, tangent à la trajectoire.

*Dans la configuration ci-dessus où on a pris le pendule se déplaçant de gauche à droite, on a $\vec{v}=L\dot{\theta}\vec{u}_T$ avec $\dot{\theta}>0$ car $\theta$ augmente au cours du mouvement jusqu'à ($+\theta_o$).

*Si on considère la configuration où on prend le pendule se déplaçant de droite à gauche, on aura $\vec{v}=-L\dot{\theta}\vec{u}_T$ car $\dot{\theta}<0$ (et $v=-L\dot{\theta}>0$), car $\theta$ diminue au cours du mouvement jusqu'à ($-\theta_o$).

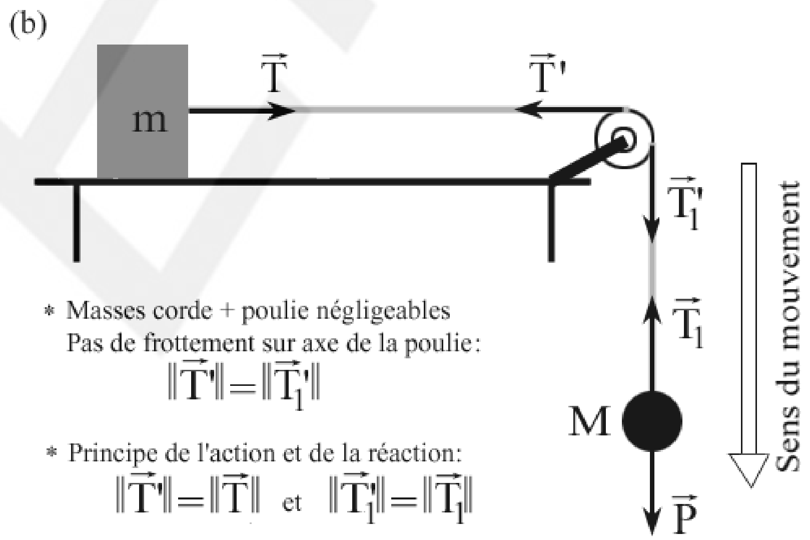



Les équations deviennent :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{\gamma}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_T: mg\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt}=m\dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=m\dfrac{dv}{d\theta}\dot{\theta}=m\dfrac{dv}{d\theta}\left(-\dfrac{v}{L}\right) & (1)\\ \vec{u}_N: T-mg\cos\theta=\dfrac{mv^2}{L} & (2)\end{cases}$$

Et la relation (1) donne encore : $vdv=-gL\sin\theta d\theta$, donc on aboutit au même résultat après intégration : $v^2=2gL(\cos\theta-\cos\theta_o)$.

**Figure b :**



Soit une corde inextensible et de masse négligeable. Une de ses extrémités est attachée à un objet de masse m posé sur un plan horizontal et l'autre extrémité à une masse M suspendue verticalement. La corde passe par une poulie de masse négligeable et il n'y a pas de frottement sur l'axe de la poulie.

Sur la masse m est appliquée une tension $\vec{T}$ (La réaction et le poids s'annulent). Sur la masse M sont appliquées le poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}_1$. Sur la poulie, existent les tensions $\vec{T}'$ et $\vec{T}_1'$ telles que représentées sur la figure ci-dessus. Comme précédemment, en prenant un élément de corde de masse $m_c$ négligeable, on aboutit à $\|\vec{\mathbf{T}}\| = \|\vec{\mathbf{T}}'\|$ et $\|\vec{\mathbf{T}}_1\| = \|\vec{\mathbf{T}}_1'\|$.

De plus, en supposant que la poulie est de masse négligeable devant M et m et qu'il n'existe pas de frottement sur l'axe de la poulie, on a : $\|\vec{\mathbf{T}}_1'\| = \|\vec{\mathbf{T}}'\|$. Finalement, on aboutit à : $\|\vec{\mathbf{T}}\| = \|\vec{\mathbf{T}}'\| = \|\vec{\mathbf{T}}_1\| = \|\vec{\mathbf{T}}_1'\|$.

**Calculons la tension T :**

Comme il n'y a pas de frottement, le mouvement d'ensemble s'effectue avec la même une accélération γ. Appliquons le PFD à la masse M : $\vec{P} + \vec{T}_1 = M\vec{\gamma}$.

Soit en projetant sur l'axe vertical dans le sens du mouvement : $P - T_1 = M\gamma \Rightarrow T_1 = +Mg - M\gamma$.

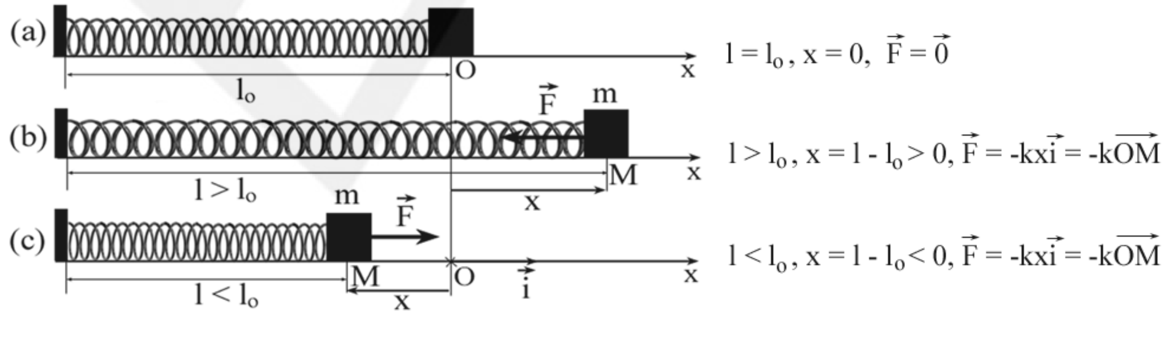
D'autre part, le PDF appliqué à m donne (La réaction et le poids s'annulent) : $\vec{T} = m\vec{\gamma}$, soit T = mγ.

Et comme T = $T_1$, on obtient : $m\gamma = Mg - M\gamma$.

$$\text{D'où } \gamma = \frac{Mg}{M+m} \text{ et } \mathbf{T = m\gamma = \frac{mM}{m+M} g}$$

**4/ La force de rappel (ou élastique) d'un ressort - loi de Hooke**

Un ressort est caractérisé par sa longueur initiale $\mathbf{l_o}$ et par sa constante de raideur **k** (unité : N/m) qui dépend de la nature du matériau. Lorsqu'on lui fait subir un allongement, il a tendance à retrouver sa longueur initiale, à condition que cet allongement ne soit pas trop important (afin d'éviter une déformation irréversible).



Le ressort est posé sur un plan horizontal sans frottement, l'une de ses extrémités est fixe, et à l'autre est accrochée un objet de masse **m**. On l'étire d'une élongation **a,** sa longueur est alors $l = l_o + a$, puis on lâche la masse m. Elle se met à osciller autour du point O, position de la masse à l'instant initial, lorsque la longueur du ressort est $l_o$. La force exercée par le ressort sur la masse est proportionnelle à l'allongement instantané $x = l - l_o$, soit : $\|\vec{F}\| = k|l - l_o|$.

**Figure (a)** : Etat initial. Le ressort à une longueur $l_o$.

**Figure (b)** : Le ressort a une longueur $l > l_o$. Il est étiré et agit sur la masse de manière à retrouver sa longueur à l'équilibre en exerçant une force de rappel $\vec{F}$ de droite à gauche, opposée au vecteur $\vec{i}$ : $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -kx\vec{i}$, avec $x > 0$.

**Figure (c)** : Le ressort a une longueur $l < l_o$. Il est comprimé et agit sur la masse de manière à retrouver sa longueur à l'équilibre en exerçant une force de rappel $\vec{F}$ de gauche à droite, de même sens que le vecteur $\vec{i}$ : on a encore $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -kx\vec{i}$, mais avec $x < 0$ (**x, abscisse de M, est une quantité <u>algébrique</u>**).

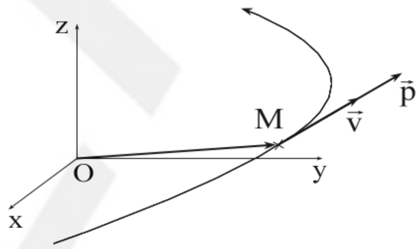
Donc, dans toutes les configurations, la tension du ressort, ou force de rappel, s'écrit :

$$\mathbf{\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -kx\vec{i}}$$ : C'est la **loi de Hooke.**

## III.6- QUANTITE DE MOUVEMENT

### III.6.1- DEFINITION

La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m, animé d'une vitesse instantanée $\vec{v}$, est le vecteur noté $\vec{p}$ qui est le produit de la masse par la vitesse : $\mathbf{\vec{p} = m\vec{v}}$.




### III.6.2- THEOREME DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

<u>Enoncé</u> : Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel de masse m, est égale à la résultante des forces extérieures appliquées à ce point :

$$\left.\frac{\mathbf{d\vec{p}}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathbf{(Rg)}} = \sum \mathbf{\vec{F}_{ext}}$$

Démonstration : $\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{(Rg)} = \left.\frac{d(m\vec{v})}{dt}\right|_{(Rg)} = m\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{(Rg)} = m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$ .

Ce théorème n'est autre que la deuxième loi de Newton lorsque la masse est constante.

Remarque :

Si la masse varie avec le temps comme c'est le cas de la fusée qui consomme son carburant, alors on a :

$$\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{(Rg)} = \left.\frac{d(m\vec{v})}{dt}\right|_{(Rg)} = m\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{(Rg)} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathbf{(Rg)}} = \mathbf{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\mathbf{m}}\vec{\mathbf{v}}$$

## III.7- MOMENT CINETIQUE

### III.7.1- MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT FIXE

**Définition :** On appelle moment par rapport à un point fixe A de l'espace, d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M, le vecteur noté :

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{t}}(\vec{\mathbf{F}}) = \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$$

C'est une quantité physique décrivant la capacité qu'a une force appliquée à un objet à le faire tourner.

D'après la définition du produit vectoriel :

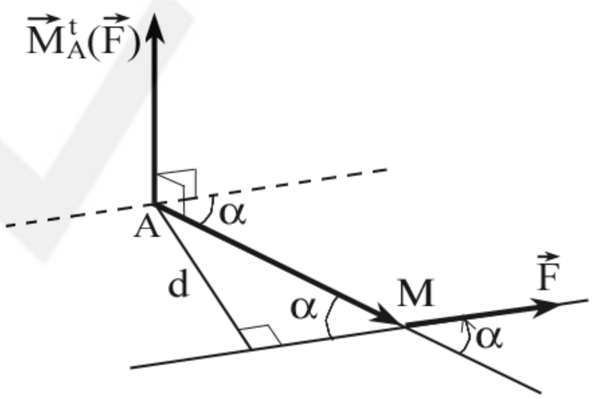
*Sa direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$.

*Son sens est donné par « la règle du tournevis ».

*Son module est $\left\|\vec{M}_A^t(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|.\left\|\vec{F}\right\|\sin\alpha$ , $\alpha$ étant l'angle entre $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$. Remarquons que la quantité $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\sin\alpha = d$ est la plus courte distance entre le point A et le support de $\vec{F}$. D'où :

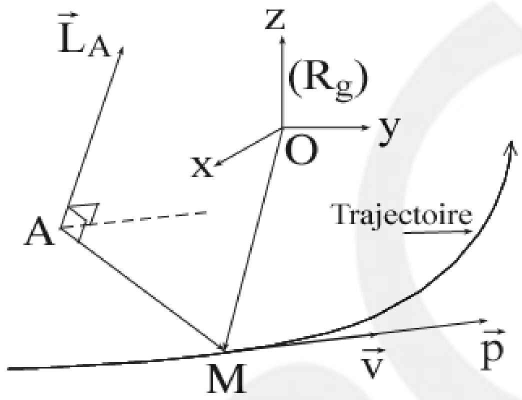
$$\left\|\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{t}}(\vec{\mathbf{F}})\right\| = \left\|\vec{\mathbf{F}}\right\| \times \mathbf{d} \,.$$

La distance **d** est appelée « bras de levier ». Le moment a pour unité (N.m).



### III.7.2- MOMENT CINETIQUE PAR RAPPORT A UN POINT FIXE

**Définition :** Le moment cinétique $\vec{L}_A$ d'un point matériel M, par rapport à un point fixe A de l'espace, est le moment de sa quantité de mouvement $\vec{p}$ : $\mathbf{\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}}$.




### III.7.3- THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

Enoncé : Dans un repère galiléen (Rg), la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M, par rapport à un point A fixe, est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces extérieures appliquées au point matériel M.

$$\left.\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right|_{(Rg)} = \vec{M}_A^t\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

Démonstration :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p})}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{p}\right) + \left(\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \left(\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p}\right) - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge \vec{p}\right)\right) + \left(\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$$

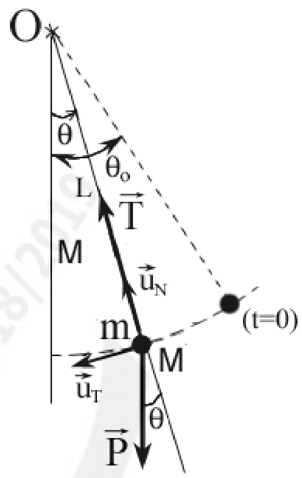
$\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{0}$, car les points O et A étant fixes, $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur constant, sa dérivée par rapport au temps est nulle.

$\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$ , d'après le théorème de la quantité de mouvement.

Soit : $\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{M}_A^t\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$

et finalement on a, par rapport à un repère galiléen : $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^t\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$ .

APPLICATION :




Reprenons l'exemple du pendule du chapitre III.5.2 §3 et déterminons la vitesse instantanée de la masse m avec les mêmes conditions initiales (à t = 0, $\theta = \theta_{max} = \theta_o$ et v = 0) et considérons le mouvement de droite à gauche. Par ailleurs, travaillons dans le repère intrinsèque où $\vec{v} = v\vec{u}_T$ .

Appliquons le Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

Les forces extérieures en présence sont le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$ .

Dans cette figure, on a : $\overrightarrow{OM} = -L\vec{u}_N$

$$\vec{v} = -L\dot{\theta}\vec{u}_T \ \text{(car } \dot{\theta} < 0 \text{)}$$

$$\vec{P} = mg\sin\theta\vec{u}_T - mg\cos\theta\vec{u}_N$$

$$\vec{T} = T\vec{u}_N$$

$$* \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = (-L\vec{u}_N) \wedge m(-L\dot{\theta}\vec{u}_T) = mL^2\dot{\theta}(\vec{u}_N \wedge \vec{u}_T) = -mL^2\dot{\theta}\vec{k} = mLv\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = mL\frac{dv}{dt}\vec{k}$$

$$* \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{0} - L\vec{u}_N \wedge (mg\sin\theta\vec{u}_T - mg\cos\theta\vec{u}_N)$$

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = -Lmg\sin\theta(\vec{u}_N \wedge \vec{u}_T) = +Lmg\sin\theta\vec{k}$$

Le théorème donne : $mL\frac{dv}{dt}\vec{k} = Lmg\sin\theta\vec{k} \Rightarrow L\frac{dv}{dt} = Lg\sin\theta$

On obtient : $L\dot{\theta}\frac{dv}{d\theta} = Lg\sin\theta \Rightarrow -v\frac{dv}{d\theta} = Lg\sin\theta \Rightarrow vdv = -Lg\sin\theta d\theta \Rightarrow v^2 = 2gL\cos\theta + C$

A t = 0, $\theta = \theta_{max} = \theta_o$ et $v = 0$. D'où : $C = -2gL\cos\theta_o$ et donc : $\mathbf{v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_o)}$

### III.7.4- PROPRIETES DU MOMENT CINETIQUE

**a/ <u>Moment cinétique constant</u> :** Si le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe A est égale à une constante non nulle, alors le mouvement du point matériel est à accélération centrale et le point A constitue le centre des accélérations. De plus, on peut en déduire que le mouvement est plan.

- $\vec{L}_A = \overrightarrow{Cste} \neq \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}^t_A(\sum \vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} // \sum \vec{F}_{ext}$ , c'est-à-dire que la résultante des forces extérieures appliquées au point matériel $\sum \vec{F}_{ext}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AM}$, donc que cette force est dirigée, quel que soit le temps t, vers le point A. La force est centrale et A est le centre des forces.

- Puisque $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$, cela revient à dire que $\overrightarrow{AM} // \vec{\gamma}$ et que le mouvement est à accélération centrale.
- Par ailleurs, $\vec{L}_A = \overrightarrow{Cste}$ et $\vec{L}_A \perp \text{plan}(\overrightarrow{AM}, \vec{v})$, alors le point matériel ne peut se déplacer que dans ce plan perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}_A$.

**b/ <u>Moment cinétique nul</u> :** Si le moment cinétique par rapport à un point fixe A est nul, alors la trajectoire du point matériel est une droite.

$\vec{L}_A = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} // \vec{v}, \quad \forall t \Rightarrow$ Le mouvement de M est rectiligne.

En effet : $\overrightarrow{AO} // \vec{v}$ **<u>et</u>** $\overrightarrow{OM} // \vec{v} \Rightarrow$ A, O et M sont sur la même droite.

## III.8- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DANS UN REFERENTIEL NON GALILEEN

Dans un référentiel galiléen (soit fixe, soit en mouvement de translation rectiligne uniforme), le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit : $\boldsymbol{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M)_{/(Rg)}}$.

Que devient ce principe pour un observateur à l'intérieur d'un référentiel qui n'est pas dans l'un ou l'autre de ces états (repos ou mouvement rectiligne uniforme), par exemple, mouvement rectiligne accéléré (automobile ou cage d'ascenseur au démarrage) ou mouvement de rotation (manège d'enfants) ? Le Principe Fondamental de la Dynamique reste valable à condition de rajouter aux forces réelles ce qu'on appelle les **forces d'inertie** qui sont ressenties par un observateur situé dans un repère en mouvement accéléré. Ces forces ne sont pas la cause mais la conséquence de l'accélération du repère mobile. Elles sont toujours opposées à l'accélération qui les a produites et s'annulent si le mouvement du repère devient rectiligne uniforme ou bien au repos.

Etudions ce problème.

L'accélération qui figure dans l'expression du Principe Fondamental de la Dynamique est l'accélération absolue qui est égale à : [Voir chapitre II.11 sur le mouvement relatif]

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) + \vec{\gamma}_c(M)$$

où $(\Re')$ est le repère en mouvement par rapport au repère fixe $(\Re)$.

Un observateur lié au repère relatif mesure une accélération $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}_a(M) - \vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) - \vec{\gamma}_c(M)$.

Pour cet observateur, le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un point matériel de masse **m** s'écrit : $m\vec{\gamma}_r(M) = m\vec{\gamma}_a(M) - m\vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) - m\vec{\gamma}_c(M)$

Soit : $$\mathbf{m\vec{\gamma}_r(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_e + \vec{f}_c}$$

Avec : * $\sum \vec{F}_{ext}$ : la résultante des **forces réelles** appliquées au point matériel,

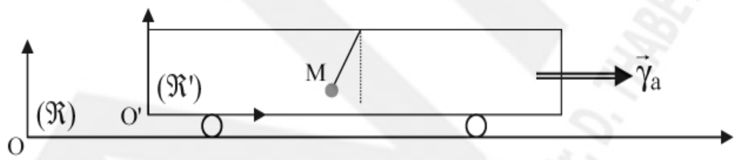
* $\vec{f}_e = -m\vec{\gamma}_e$ et $\vec{f}_c = -m\vec{\gamma}_c$ : deux **forces fictives**, appelées respectivement force d'inertie d'entraînement et force d'inertie de Coriolis.

Elles sont fictives car leur existence ne dépend que du mouvement du repère $(\Re')$ par rapport à $(\Re)$ : si subitement la vitesse de l'origine O' de $(\Re')$ devient constante ($\vec{\gamma}(O')_{(\Re)} = \vec{0}$) et que la vitesse angulaire de $(\Re')$ par rapport à $(\Re)$ s'annule : $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$, alors ces deux forces disparaissent. Ceci d'après les expressions de $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c$ que l'on rappelle :

$$\vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) = \vec{\gamma}(O')_{(\Re)} + \dot{\vec{\omega}}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{v}_r$$

<u>EXEMPLE</u> : Etude du pendule à l'intérieur d'un train en phase d'accélération.




Un pendule est accroché au plafond d'un wagon de train.

1/ A l'instant initial, train à l'arrêt (donc repère lié au train fixe), l'observateur, assis dans un fauteuil, constate que l'état d'équilibre du pendule est la verticale.

2/ Le train démarre avec une accélération $\gamma_a$ mesurée par rapport à un repère $(\Re)$ lié à la Terre, considéré comme galiléen. Le repère lié au train $(\Re')$ a un mouvement rectiligne accéléré (mais avec $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$) dans lequel :

*L'observateur est propulsé en arrière contre le dossier du fauteuil (sens contraire de l'accélération $\vec{\gamma}_a$ ).

*L'observateur constate que le pendule acquiert une nouvelle position d'équilibre : durant cette phase d'accélération, il est dévié dans le sens contraire du mouvement du train et fait un angle $\theta_o$ <u>constant</u> par rapport à la verticale. Pour lui, dans son repère en mouvement accéléré :

$$\mathbf{m\vec{\gamma}_r(M) = \vec{0}} \text{ (le pendule est immobile).}$$

Comment expliquer cet équilibre ?

Les deux forces <u>réelles</u> en présence sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}$. On a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_a = \vec{P} + \vec{T}$. Mais pour avoir cet équilibre (pendule incliné), il faut nécessairement une force $\vec{f}$ qui s'oppose à $m\vec{\gamma}_a = \vec{P} + \vec{T}$, telle que $\vec{f} + m\vec{\gamma}_a = \vec{0}$.

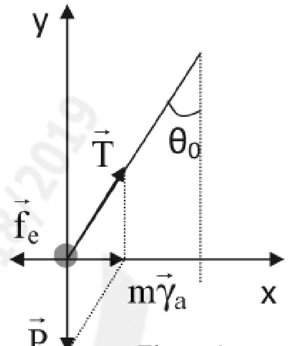


Figure 1

On doit faire intervenir les forces fictives dues au mouvement de $(\Re')$ :

$\mathbf{m\vec{\gamma}_r(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_e + \vec{f}_c = \vec{0}}$ , et comme :

$\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O')_{(\Re)} \\ \vec{\gamma}_c = \vec{0} \end{cases}$ , on obtient : $m\vec{\gamma}_a + \vec{f}_e = \vec{0}$,

soit : $\mathbf{\vec{f}_e = -m\vec{\gamma}_e = -m\vec{\gamma}(O')_{(R)} = -m\vec{\gamma}_a}$ . (figure 1)

*On peut aussi calculer l'angle $\theta_o$ que fait le pendule à l'équilibre (figure 2):

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_e = \vec{0}$$

$\begin{cases} /Ox: & T_x = f_e = m\gamma_a \\ /Oy: & T_y = mg \end{cases} \Rightarrow tg\theta_o = \dfrac{T_x}{T_y} = \dfrac{\gamma_a}{g} \Rightarrow \mathbf{tg\theta_o = \dfrac{\gamma_a}{g}} \Rightarrow \theta_o = cste$ .

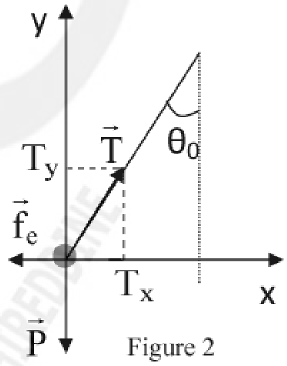


Figure 2

# ANNEXE

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I-DEFINITION

On appelle équation différentielle une relation mathématique qui relie entre elles une fonction scalaire $y(x)$, certaines de ses dérivées $y^{(n)}(x)$ et la variable x :

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

*On définit l'ordre de l'équation différentielle comme étant l'ordre de dérivation le plus élevé figurant dans cette équation. Exemples :

$yy'' - y^2 = 1$ : équation différentielle d'ordre 2,

$y''' + \sqrt{x} = 0$ : équation différentielle d'ordre 3.

*Résoudre une équation différentielle consiste à trouver une fonction $y(x)$ telle que, remplacée dans cette équation, on aboutit à une identité mathématique. Exemples :

* $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(x) = \sin \omega x$

* $y' - \alpha y = 0, \quad y(x) = e^{\alpha x}$

* $y' + y^2 = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x + C}$

* $y'^2 - yy'' = 1, \quad y(x) = \sin x$

Remarque : $y = \cos x$ est également une solution de cette dernière équation. Pour une même équation différentielle, il est donc possible de déterminer plusieurs solutions (On verra les conditions pour déterminer une solution unique).

## II- EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 1er ORDRE

Une équation différentielle du 1er ordre est une relation du type : $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ .

Elle s'écrit explicitement : $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = 0$ ou encore : $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$

Exemples : $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2 y - 1}{\sqrt{x}} = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2 + y^2}{x - y} = 0, ...$

### II.1- EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 1er ORDRE A VARIABLES SÉPAREES

Une équation différentielle est dite « à variables séparées » si elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{f(x)}{g(y)}=0$ ou encore : $f(x)dx+g(y)dy=0$.

On peut « séparer » les variables, c'est-à-dire mettre les termes en x d'un côté du signe = et les termes en y de l'autre côté, comme suit : $f(x)dx=-g(y)dy$.

Dans ce cas, la résolution de l'équation différentielle s'obtient par intégration d'une fonction à une seule variable, soit f(x), soit g(y) :

$$f(x)dx+g(y)dy=0 \Rightarrow f(x)dx=-g(y)dy \Rightarrow \int f(x)dx=-\int g(y)dy+C$$

La constante C est appelée constante d'intégration.

Exemple : $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^2}{y^2}=0$

Résolution :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{y^2}=0 \Rightarrow x^2dx=-y^2dy \Rightarrow \int x^2dx=-\int y^2dy+C$$

Soit : $\dfrac{x^3}{3}=-\dfrac{y^3}{3}+C$,

Que l'on peut mettre sous la forme suivante : $y(x)=\sqrt[3]{K-x^3}$, avec $K=3C$.

### II.2- EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 1er ORDRE A VARIABLES SEPARABLES

Une équation différentielle est dite « à variables séparables » si elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{f_1(x)g_1(y)}{f_2(x)g_2(y)}=0$ ou encore : $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$.

Cette équation différentielle peut se ramener à une équation à variables séparées. En effet, divisons la par $f_2(x)g_1(y)$ :

$$\frac{1}{f_2(x)g_1(y)}(f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy)=0 \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$$

Notons $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=f(x)$ et $g(x)=\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}$, alors : $f(x)dx+g(y)dy=0$, soit : $\int f(x)dx=\int g(y)dy+C$

Exemple :

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x+xy^2}{y+yx^2}=0$. Cette équation peut se ramener à une équation différentielle à variables séparées.

En effet :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x+xy^2}{y+yx^2}=0 \Rightarrow x(1+y^2)dx=-y(1+x^2)dy \Rightarrow \frac{x}{1+x^2}dx=-\frac{y}{1+y^2}dy$$

Intégrons cette équation différentielle :

$$\frac{x}{1+x^2}dx=-\frac{y}{1+y^2}dy \Rightarrow \int\frac{x}{1+x^2}dx=-\int\frac{y}{1+y^2}dy+C$$

Calculons $\int\frac{x}{1+x^2}dx$ :

Faisons un changement de variable : posons $u=1+x^2$. Alors, la différentielle de **u** est : $du=2xdx$.

D'où : $xdx=\frac{du}{2}$ que l'on remplace dans $\int\frac{x}{1+x^2}dx$, soit : $\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\text{Ln } u=\text{Ln }\sqrt{u}$.

En revenant à la variable x : $\int\frac{x}{1+x^2}dx=\text{Ln}\sqrt{1+x^2}$.

Et de même : $\int\frac{y}{1+y^2}dy=\text{Ln}\sqrt{1+y^2}$

Donc : $\text{Ln}\sqrt{1+x^2}=-\text{Ln}\sqrt{1+y^2}+C \Rightarrow \text{Ln}\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=C=\text{Ln}\sqrt{K} \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)=K$

Que l'on peut mettre sous la forme : $y(x)=\pm\sqrt{\frac{K}{1+x^2}-1}$. C'est la solution générale de notre équation différentielle.

## III- EQUATION DIFFERENTIELLE DU 2$^{ème}$ ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Une équation différentielle du 2$^{ème}$ ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme :

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x) \quad (1)$$

où les coefficients a, b et c sont constants.

- Méthode de résolution (les démonstrations peuvent être consultées dans les ouvrages de mathématiques):

La <u>solution générale</u> de l'équation (1) est de la forme : $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$.

$y_H(x)$ : c'est la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (dite homogène) :

$ay''_H(x)+by'_H(x)+cy_H(x)=0 \quad (2)$

$y_P(x)$ : c'est <u>une</u> solution <u>particulière</u> de l'équation différentielle (1) qui dépend de la forme de la fonction figurant au second membre f(x).

- **Résolution de l'équation différentielle homogène :**

Intéressons-nous à la résolution de l'équation (2) dite « équation homogène » et cherchons les formes que peuvent avoir la solution $y_H(x)$.

On écrit « l'équation caractéristique » à partir des coefficients a, b et c de l'équation différentielle, soit une équation du second degré en **r** : $ar^2 + br + c = 0$ qu'on résout :

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Trois cas peuvent se présenter selon le signe de $\Delta$ :

1/ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$ : existence de deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La solution $y_H(x)$ de (2) est : $\boxed{y_H(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$, A et B étant des constantes.

2/ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$ : existence de deux racines complexes distinctes :

$\Delta = b^2 - 4ac = -(4ac - b^2) = i^2(4ac - b^2) = i^2(-\Delta)$

Les solutions sont :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Soit : $r_1 = -\dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ et $r_2 = -\dfrac{b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Posons : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$. Alors, la solution de l'équation homogène (2) est :

$\boxed{y_H(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$ où A et B sont des constantes.

On peut la mettre également sous la forme :

$\boxed{y_H(x) = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x + \varphi)}$ où C et $\varphi$ sont des constantes (ou bien : $y_H(x) = C'e^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi)$ )

$A\cos\beta x + B\sin\beta x = C\cos(\beta x + \varphi) = C\cos\beta x\cos\varphi - C\sin\beta x\sin\varphi$

Soit, par identification : $\begin{cases} A = C\cos\varphi \\ B = -C\sin\varphi \end{cases}$. On en déduit que : $\begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ tg\varphi = -\dfrac{B}{A} \end{cases}$

3/ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ : existence d'une racine double : $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$

La solution de l'équation homogène (2) est : $\boxed{y_H(x) = e^{\alpha x}(A + Bx)}$.

Remarque : En dynamique, la connaissance des conditions initiales du problème physique permet de fixer les constantes $A$ et $B$ (ou $C$ et $\varphi$) et ainsi aboutir à l'unicité de la solution de l'équation différentielle caractérisant le mouvement du point matériel.

Quelques exemples :

1/ $2y''(x)+5y'(x)+2y(x)=0$

$\Delta = b^2-4ac = 9>0 \Rightarrow r_1=-\dfrac{1}{2}$ et $r_2=-2$

Solution de l'équation différentielle : $y(x)=Ae^{-\frac{1}{2}x}+Be^{-2x}$.

2/ $2y''(x)+5y'(x)+2y(x)=4$

1ère méthode : changement de variable, on pose : $Y = y - 2$.

Alors, après remplacement dans l'équation différentielle, on a : $2Y''(x)+5Y'(x)+2Y(x)=0$

$\Delta = b^2-4ac = 9>0 \Rightarrow r_1=-\dfrac{1}{2}$ et $r_2=-2$, solution : $Y(x)=Ae^{-\frac{1}{2}x}+Be^{-2x}=y(x)-2$

Soit : $y(x)=Ae^{-\frac{1}{2}x}+Be^{-2x}+2$

2ème méthode : La solution générale est : $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$

$y_H(x)=Ae^{-\frac{1}{2}x}+Be^{-2x}$ (exemple 1)

On choisit comme solution particulière C, une constante : $y_P(x)=C$

Après remplacement dans l'équation différentielle, on trouve : $y_P=2$.

D'où : $y(x)=Ae^{-\frac{1}{2}x}+Be^{-2x}+2$

3/ $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$

$\Delta = b^2-4ac=0 \Rightarrow r_1=r_2=\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-1$

Solution de l'équation différentielle : $y(x)=e^{-x}(A+Bx)$

4/ $y''(x)+2y'(x)+2y(x)=0$

$\Delta = b^2-4ac=-4<0 \Rightarrow \alpha=-\dfrac{b}{2a}=-1$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=1$

Solution de l'équation différentielle : $y(x)=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ ou $y(x)=Ce^{-x}\cos(x+\varphi)$ .