SOMMAIRE

CHAPITRE II- Cinématique du point matériel
&
Mouvement relatif

II- Cinématique du point matériel
&
Mouvement relatif

II.1- INTRODUCTION

L’étude entreprise ce semestre concerne l’étude des mouvements de systèmes matériels dans le cadre de la mécanique classique ou mécanique newtonienne qui est divisée en deux grandes parties : la cinématique et la dynamique.

La cinématique s’intéresse aux mouvements des systèmes matériels au cours du temps indépendamment des causes qui les provoquent, tandis que la dynamique s’intéresse aux causes qui engendrent les mouvements.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à l’étude de la cinématique du point matériel. Celui-ci est défini comme un être mathématique dépourvu de dimensions mais doté d’une masse. Par exemple, pour étudier le mouvement de la Terre autour du Soleil, on peut modéliser la Terre par un point matériel dont la masse est celle de la Terre, en faisant alors abstraction dans une première étape du mouvement de rotation de celle-ci autour de son axe.

Les mouvements sont toujours étudiés par rapport à un référentiel dit galiléen que l’on définira plus tard. Il nous faudra définir le système de coordonnées le mieux adapté au problème physique considéré.

L’’objet de ce chapitre sera d’exprimer les vecteurs instantanées de position, de vitesse et d’accélération d’un point matériel dans différents types de repères.

Remarque : rigoureusement, il faut faire une distinction entre repère et référentiel :

*Un référentiel est un solide de référence dans lequel un observateur décrit le mouvement (vitesse et trajectoire) d'un mobile appelé "système", par exemple le référentiel du laboratoire.

*Un repère est constitué d'un point origine et d'une base. C'est un outil mathématique qui sert à effectuer les calculs (par projection sur ses axes).

Par exemple, au référentiel lié au « solide Terre », on peut associer plusieurs repères : repère cartésien, sphérique,…selon la nature du problème.

II.2- GRANDEURS CINEMATIQUES EXPRIMEES DANS LE REPERE CARTESIEN

II.2.1- VECTEUR POSITION ET TRAJECTOIRE

a/ Définition du vecteur position instantanée

On appelle vecteur position instantanée du point matériel M à l’instant t dans le repère cartésien

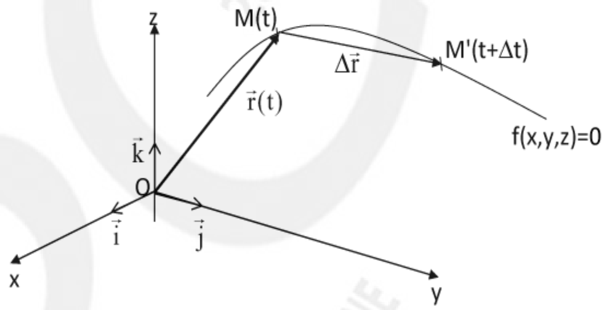
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) = \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x(t)}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y(t)}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z(t)}\vec{\mathbf{k}}$ de module $\left\|\overline{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Son unité dans le Système International (S.I.) est le mètre (m).

Les expressions de x(t), y(t) et z(t) s'appellent les équations horaires du mouvement.

Remarque : Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont constants en module et en direction quel que soit le temps t, donc leurs dérivées par rapport au temps sont nulles.

b/ Définition de la trajectoire

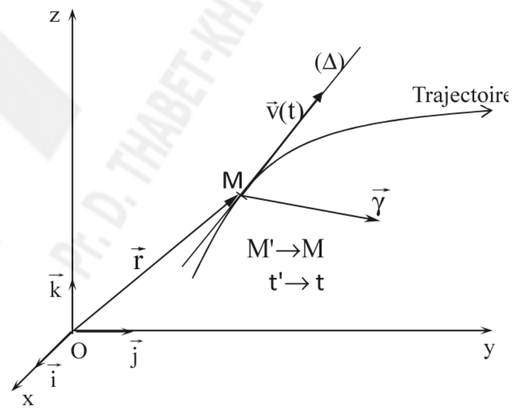
La trajectoire représente le lieu géométrique dans le repère considéré des différentes positions M du point matériel à chaque instant t. Mathématiquement, elle est décrite par une relation entre les coordonnées du point M dans laquelle le paramètre temps t n'apparaît pas : $f(x, y, z) = 0$.



II.2.2- VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

Le vecteur vitesse instantanée est défini comme étant la variation instantanée du vecteur position par rapport au temps, autrement dit, c'est la dérivée première par rapport au temps du vecteur position, soit :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$



En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(M) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \text{ avec } v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt} \text{ et } v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Soit, en introduisant la notation de Newton $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{y}}\vec{\mathbf{j}} + \dot{\mathbf{z}}\vec{\mathbf{k}}$

Son module à l'instant t est : $\left\|\vec{v}(t)\right\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$, unité dans S.I . : m/s.

Remarques :

1/ Le vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ s'appelle vecteur vitesse moyenne entre les positions M et M' durant l'intervalle de temps Δt.

2/ Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ est tangent à la trajectoire au point M(t) et est dirigé dans le sens du mouvement.

3/ Si le module de $\vec{v}$ est constant dans le temps, on dit que le mouvement est « uniforme ».

II.2.3- VECTEUR ACCELERATION INSTANTANEE

Il est défini par la variation instantanée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée, autrement dit c'est la dérivée première par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée, ou bien la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \gamma_x\vec{i} + \gamma_y\vec{j} + \gamma_z\vec{k},$$

avec $\gamma_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, $\gamma_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ et $\gamma_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$.

D'où : $$\boldsymbol{\vec{\gamma}(t) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}}$$

Son module est : $\|\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2}$, unité dans S.I. : m/s^2.

Remarques :

1/ A partir de la définition du vecteur accélération $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a :

$\vec{\gamma} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(M') - \vec{v}(M)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Géométriquement, le vecteur $\Delta\vec{v}$ est toujours dirigé vers la concavité de la trajectoire. On en conclue que le vecteur accélération est dirigé vers la concavité de la trajectoire du point matériel.

2/ Mouvement accéléré ou retardé :

Le mouvement est accéléré lorsque $\|\vec{v}(t)\|$ est une fonction croissante du temps, donc $\|\vec{v}(t)\|^2$ est également une fonction croissante du temps, c'est-à-dire : $\frac{d\|\vec{v}(t)\|^2}{dt} > 0$. Or $\|\vec{v}(t)\|^2 = \vec{v}^2$ donc

$$\frac{d\vec{v}^2}{dt} > 0 \Rightarrow 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} > 0 \Rightarrow \vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}.\vec{\gamma} > 0}.$$

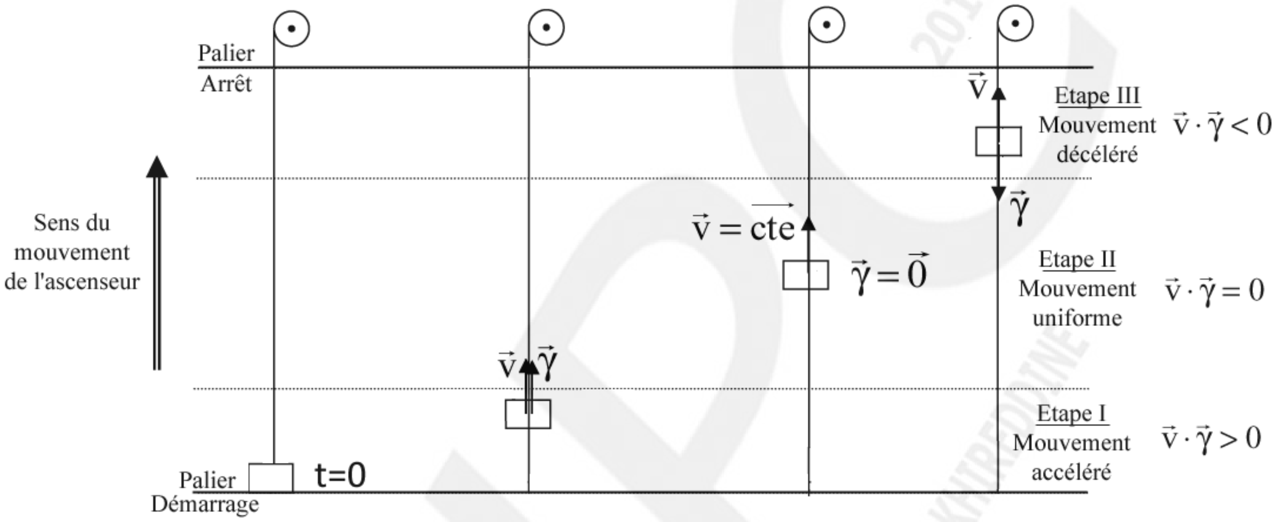
Et inversement, le mouvement est retardé ou décéléré lorsque $\mathbf{\vec{v}.\gamma < 0}$.

<u>Exemple</u> : mouvement de l'ascenseur au cours de la montée:

Etape I : démarrage de l'ascenseur de la position de repos : pendant un court instant, le mouvement est accéléré : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont dans le même sens, donc : $\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$.

Etape II : La vitesse devient constante, donc $\vec{\gamma} = \vec{0}$: le mouvement est uniforme.

Etape III, l'ascenseur va bientôt s'arrêter, il décélère, donc $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont en sens opposés. Le mouvement est retardé jusqu'à l'arrêt : $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$.

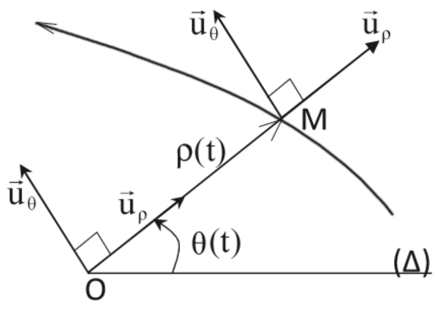


II.3- GRANDEURS CINEMATIQUES EXPRIMEES DANS LE REPERE POLAIRE

II.3.1- VECTEUR POSITION

Le repère polaire considéré est noté $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. A l'instant t, la position d'un point matériel $M(\rho(t), \theta(t))$ est repérée par le vecteur position instantanée : $\mathbf{\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{u}_\rho}$, $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho(t)$

Les expressions de $\rho(t)$ et $\theta(t)$ sont les équations horaires du mouvement.



<u>Remarque</u> : Nous avons déjà signalé, dans le chapitre I, que le repère $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est un repère local. Ainsi, ses deux vecteurs unitaires ne sont constants qu'en module, ils sont variables en direction, donc leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles.

II.3.2- VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

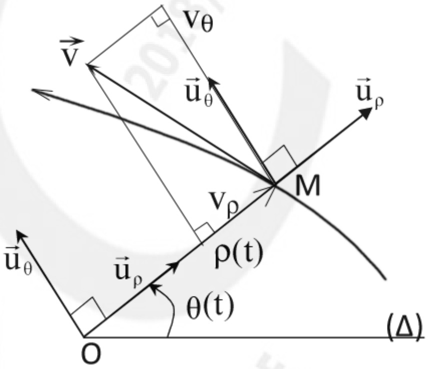
Avec toujours la même définition qu'en coordonnées cartésiennes, l'expression du vecteur vitesse instantanée est la suivante :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\rho(t)\vec{u}_\rho(t)\Big) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ (Dérivation composée)}$$

D'où l'expression du vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires : $\boldsymbol{\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$

Son module est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}$



On note :

$v_\rho = \dot{\rho}$: est la composante radiale du vecteur vitesse,

$v_\theta = \rho\dot{\theta}$: est la composante orthoradiale du vecteur vitesse,

$\dot{\theta}$: est la vitesse angulaire du point M.

Et on écrira : $\boldsymbol{\vec{v} = v_\rho\vec{u}_\rho + v_\theta\vec{u}_\theta}$

<u>Remarque</u> : Autre façon de calculer $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$:

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta(t)\vec{i} + \cos\theta(t)\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} = \frac{d\theta}{dt}\Big(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\Big) = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

II.3.3- VECTEUR ACCELERATION INSTANTANEE

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta\Big) = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-\vec{u}_\rho)\dot{\theta}$$

Finalement, l'expression de l'accélération instantanée en coordonnées polaires est :

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta}$$

Son module est :

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^2}$$

On note :

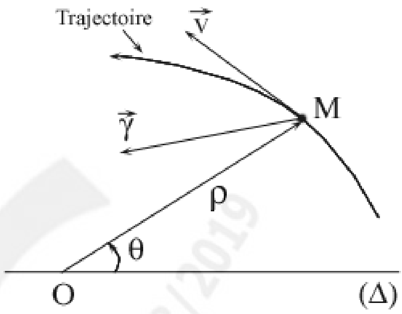
$\gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$: la composante radiale du vecteur accélération,

$\gamma_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$: la composante orthoradiale du vecteur accélération,

$\ddot{\theta}$: l'accélération angulaire du point M.

Et l'on écrira : $\vec{\gamma} = \gamma_\rho \vec{u}_\rho + \gamma_\theta \vec{u}_\theta$

Finalement, on peut représenter les trois vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$ sur une même figure :

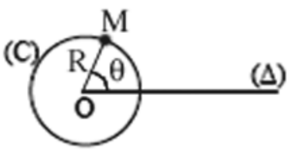
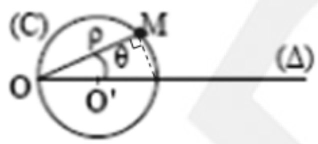
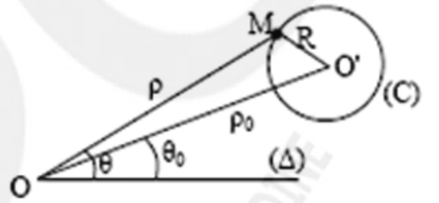


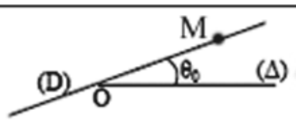
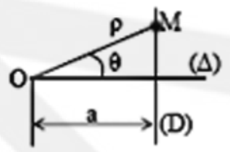
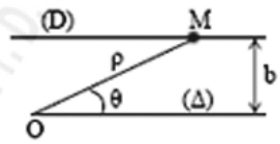
<u>Remarque</u> : $\vec{\gamma}$ orienté selon la concavité de la trajectoire.

II.3.4- EQUATIONS DE QUELQUES TRAJECTOIRES EN COORDONNEES POLAIRES

Ce sont des équations de la forme $f(\rho, \theta) = 0$.

Quelques exemples sont illustrés ci-après :

		 $\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ et $R = \lVert\overrightarrow{OM}'\rVert$
$\rho = R, \ \forall\theta$ Trajectoire : cercle (O,R)	$\rho(\theta) = 2R\cos\theta$ Trajectoire : cercle (O',R)	$R(\rho,\theta) = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}$ Trajectoire : cercle (O',R)

		
$\theta = \theta_0, \ \forall\rho$ Trajectoire : Droite (D)	$\rho(\theta) = \dfrac{a}{\cos\theta}$ Trajectoire : Droite (D) ⊥ (Δ)	$\rho(\theta) = \dfrac{b}{\sin\theta}$ Trajectoire : Droite (D) //(Δ)

II.4- GRANDEURS CINEMATIQUES EXPRIMEES DANS LE REPERE CYLINDRIQUE

A partir des expressions précédentes de $\overrightarrow{OM}, \vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ du repère polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, on a directement les expressions de $\overrightarrow{OM}, \vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ dans le repère cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

II.4.1- VECTEUR POSITION

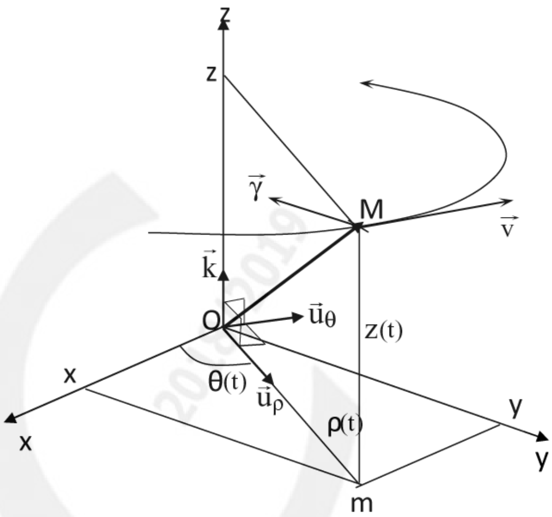
La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\mathbf{\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{k}}$$

Les équations horaires du mouvement sont :

$$\rho(t), \theta(t) \text{ et } z(t).$$

Comme dans le repère polaire, $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ sont dérivables par rapport au temps. Le troisième vecteur $\vec{k}$ est constant.



Le module de $\overrightarrow{OM}$ est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

II.4.2- VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{k})}{dt} = \frac{d(\rho(t)\vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(z(t)\vec{k})}{dt}, \text{ soit : } \boldsymbol{\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}}$$

Les composantes de $\vec{v}$ sont : * $v_\rho = \dot{\rho}$: est la composante radiale du vecteur vitesse,

* $v_\theta = \rho\dot{\theta}$: est la composante orthoradiale du vecteur vitesse,

* $v_z = \dot{z}$

Le module du vecteur vitesse $\vec{v}$ est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$

II.4.3- VECTEUR ACCELERATION INSTANTANEE

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k})}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} + \frac{d(\dot{z}\vec{k})}{dt}, \text{ soit : } \boldsymbol{\vec{\gamma}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}}$$

Les composantes de $\vec{\gamma}$ sont : * $\gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$: la composante radiale du vecteur accélération,

* $\gamma_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$: la composante orthoradiale du vecteur accélération,

* $\gamma_z = \ddot{z}$

Le module du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$

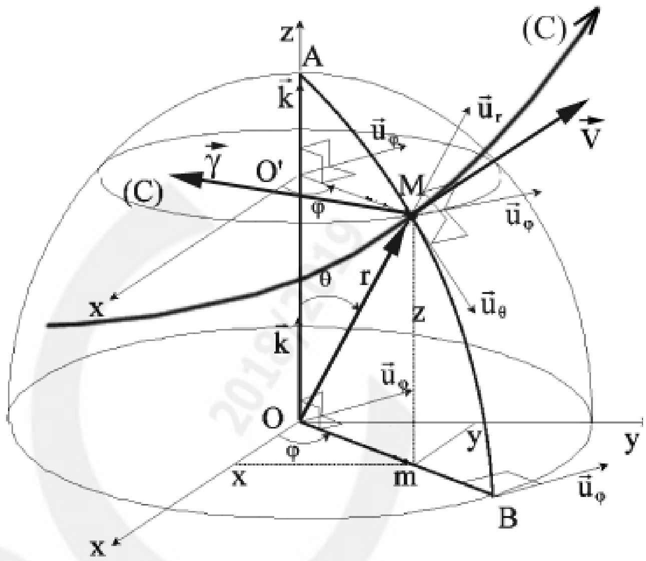
II.5- GRANDEURS CINEMATIQUES EXPRIMEES DANS LE REPERE SPHERIQUE

II.5.1- VECTEUR POSITION

Dans le repère sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, à l'instant t, un point matériel M a pour coordonnées $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r}.$$

Dans ce cas, les équations horaires du mouvement sont : $r(t), \theta(t)$ et $\varphi(t)$. Les vecteurs unitaires de la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ constituent un repère local. Par rapport au repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ils sont donc variables en directions. Leurs modules sont constants et égaux à 1.



II.5.2- VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les relations de correspondances suivantes:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

D'où : $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\,\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\sin\phi\,\vec{j} + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\,\vec{j} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{k}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}) + \dot{\phi}\sin\theta(-\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

Finalement, l'expression de la vitesse instantanée $\vec{v}(M)$ dans un repère sphérique est :

$$\boldsymbol{\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi}$$

$$\vec{v}(t) = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_\varphi\vec{u}_\varphi, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2}$$

II.5.3- VECTEUR ACCELERATION INSTANTANEE

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi)$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

$* \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$ (calculé ci-dessus)

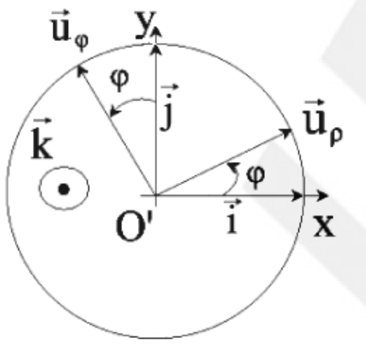
$* \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k})$

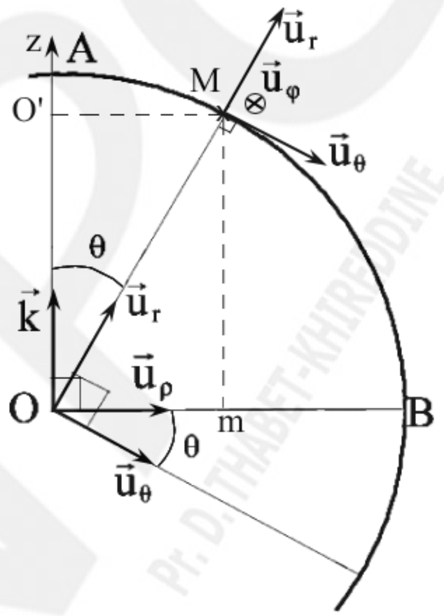
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi\vec{i} - \dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi\vec{j} - \dot{\theta}\cos\theta\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}) + \dot{\varphi}\cos\theta(\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{u}_\varphi$$

$$*\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = ?$$

Le repère $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)$ est un repère polaire dans le plan (xOy) avec l'angle φ comme angle polaire (voir figures du chapitre I, §I.11.4).





donc : $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} = -\vec{u}_\rho$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{u}_\rho = \sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta$$

D'où : $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta)$

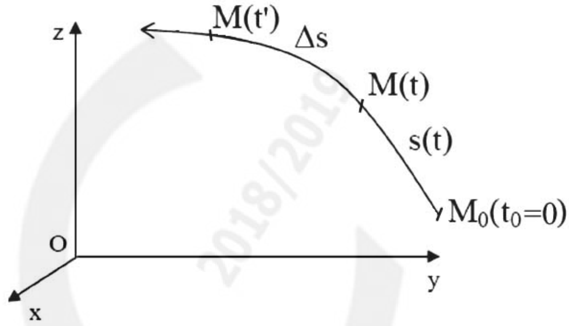
L'expression de $\vec{\gamma}$ est alors :

$$\boldsymbol{\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{u}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{u}_\varphi}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_r\vec{u}_r + \gamma_\theta\vec{u}_\theta + \gamma_\varphi\vec{u}_\varphi \text{ et } \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_\varphi^2}$$

II.6- GRANDEURS CINEMATIQUES EXPRIMEES DANS LE REPERE INTRINSEQUE OU CURVILIGNE

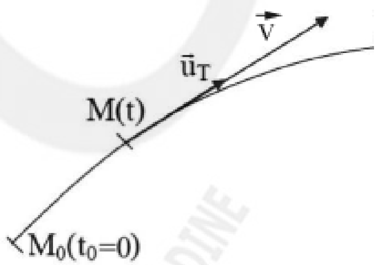
II.6.1- ABSCISSE CURVILIGNE



On appelle abscisse curviligne à l'instant t, notée $s(t)$, d'un point matériel M, la longueur de l'arc de la trajectoire de M comptée à partir d'une origine M_o à $t_o = 0$:

$$\mathbf{s(t) = s(M) = \overset{\frown}{M_0M}(t)}$$

II.6.2- VECTEUR VITESSE INSTANTANEE



La vitesse instantanée en module est exprimée par :

$$v(t) = \lim_{t'\to t} \frac{s(t') - s(t)}{t' - t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Soit : $\quad \mathbf{\|\vec{v}(t)\| = v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)}$

*Pour écrire le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ de M à l'instant t, on définit le vecteur unitaire $\vec{u}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{v}$ qui est alors tangent à la trajectoire en M, et l'on a :

$$\mathbf{\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_T = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = \dot{s}(t)\vec{u}_T}$$

On peut démontrer cette relation de la manière suivante :

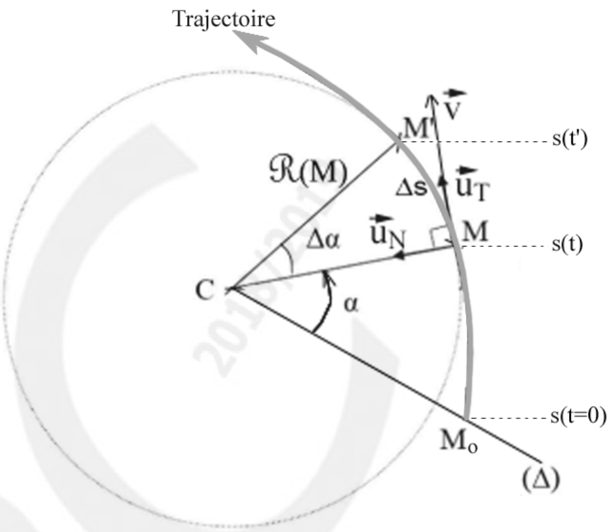
La vitesse moyenne du point matériel entre M et M' est : $\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \times \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \times \frac{\Delta s}{\Delta t}$

La vitesse instantanée est : $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}} \times \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\|\overrightarrow{MM'}\|} \times \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$

Il faut bien noter que lorsque $\Delta t \to 0$, l'arc MM' est pratiquement confondu avec le segment (ou la corde) MM', d'où l'écriture $\overset{\frown}{MM'} = \|\overrightarrow{MM'}\|$ et la corde MM' tend vers la tangente en M à la trajectoire lorsque M' se rapproche de M : la quantité $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\|\overrightarrow{MM}\|}$ représente donc à la limite un vecteur unitaire qui n'est autre que celui du vecteur $\vec{v}$, que l'on note $\vec{u}_T$.

II.6.3- VECTEUR ACCELERATION INSTANTANEE

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \ddot{s}\vec{u}_T + \dot{s}\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$



- Calcul de $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \dot{s}\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta s}$$

Considérons un élément d'arc Δs de la trajectoire du point matériel M, à un instant t, suffisamment petit pour qu'il puisse être confondu avec un arc de cercle tangent à la trajectoire au point M, de rayon $\mathcal{R}(M)$ ou $\mathcal{R}(t)$ et de centre C.

Alors : $\widehat{MM'} = \Delta s = \mathcal{R}(t)\Delta\alpha$, α étant l'angle de rotation instantanée de $\vec{u}_T$.

En remplaçant dans $\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta s}$, on obtient : $\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta s} = \frac{1}{\mathcal{R}(t)}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\alpha}$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \dot{s}\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta s} = \dot{s}\lim_{\Delta\alpha \to 0}\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\alpha} = \dot{s}\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\frac{d\vec{u}_T}{d\alpha} = \dot{s}\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\vec{u}_N$$

$\frac{d\vec{u}_T}{d\alpha} = \vec{u}_N$: en effet, on peut considérer localement que (C, (Δ)) constitue un repère polaire, où les coordonnées de M sont : $M(\mathcal{R},\alpha)$. Par conséquent, la dérivée de $\vec{u}_T$ par rapport à l'angle polaire α donne le vecteur directement perpendiculaire à $\vec{u}_T$ dans le sens du mouvement, soit le vecteur noté $\vec{u}_N$: $\vec{u}_N \perp \vec{u}_T$. $\vec{u}_N$ est toujours dirigé vers la concavité de la trajectoire réelle et, plus rigoureusement, est dirigé vers le centre C(t) du cercle tangent à la trajectoire en M(t) à chaque instant t.

D'où : $\vec{\gamma} = \ddot{s}\vec{u}_T + \dot{s}\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \ddot{s}\vec{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{\mathcal{R}(t)}\vec{u}_N = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\mathcal{R}(t)}\vec{u}_N$, avec $v = \|\vec{v}\|$

$(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$: les vecteurs $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ constituent le repère intrinsèque.

Finalement, l'expression de $\vec{\gamma}$ dans $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ est : $\boldsymbol{\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\mathcal{R}(t)}\vec{u}_N}$

<u>Remarques</u> :

1/ $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ est un repère local, c'est-à-dire que les vecteurs de base $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ sont constants en module, mais varient en direction. $\vec{u}_T$ est le vecteur unitaire tangentiel, $\vec{u}_N$ le vecteur unitaire normal.

2/ Dans $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, l'accélération s'écrit : $\boldsymbol{\vec{\gamma} = \gamma_T \vec{u}_T + \gamma_N \vec{u}_N}$ avec :

$\gamma_T = \dfrac{dv}{dt}$ est l'accélération tangentielle qui résulte de la variation du module de $\vec{v}$.

$\gamma_N = \dfrac{v^2}{\Re(t)}$ est l'accélération normale qui résulte de la variation de la direction de $\vec{v}$.

Le module de l'accélération s'écrit alors: $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_T^2 + \gamma_N^2}$.

3/ $\Re(t)$ ou $\Re(M)$ est le rayon de courbure de la trajectoire en M à l'instant t.

4/ Connaissant $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{\gamma}\|$, on peut déterminer $\Re(t)$:

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt}, \text{ puis } \gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T^2} \text{ et } \gamma_N = \frac{v^2}{\Re(t)} \Rightarrow \Re(t) = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{v^2}{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_T^2}}$$

5/ Si $\Re(t)$ est très grand ($\Re(t) \to \infty$), alors $\gamma_N \to 0$ et le mouvement est rectiligne.

6/ $\gamma_T = 0$ et $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N$ avec C fixe $\Rightarrow$ mouvement à accélération centrale : $\vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

7/ A $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, on peut adjoindre un troisième vecteur $\vec{w}$, par exemple, perpendiculaire aux deux autres et tel que le trièdre $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{w})$ soit direct ($\vec{w} = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$). Ce système est appelée repère de Frénet.

Pour ce qui nous concerne, on travaillera essentiellement dans le repère à deux dimensions $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$.

II.7- MOUVEMENT RECTILIGNE

Soit un point matériel M se déplaçant sur une droite x'Ox de vecteur unitaire $\vec{i}$:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}, \quad \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \dot{x}\vec{i}, \quad \vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} = \gamma_x \vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

Considérons les deux cas suivants :

II.7.1- MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

Le mouvement est dit uniforme lorsque le vecteur vitesse est constant : $\boldsymbol{\vec{v} = v_o \vec{i} = \overrightarrow{cste}}$, soit $\boldsymbol{\vec{\gamma} = \vec{0}}$.

(Attention ! v_o est une grandeur algébrique).

On cherche l'équation horaire de mouvement x(t). Pour cela, il est nécessaire de connaître les conditions initiales du mouvement de M sur la position et la vitesse.

Posons qu'à $t = 0$: $x = x_o$. La condition sur la vitesse est connue : on sait que v_o est constant quel que soit le temps t (à partir du moment où le mobile atteint la vitesse v_o et la conserve au cours du temps).

Alors : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dx\vec{i}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} = v\vec{i} = v_o\vec{i} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = v_o$

C'est une équation différentielle du premier ordre que l'on va intégrer pour trouver x(t) :

On sépare les variable x et t comme suit : $dx = v_o dt$, puis on intègre de x_o à x d'un côté et de 0 à t de l'autre : $\int_{x_o}^{x(t)} dx = \int_0^t v_o dt \Rightarrow x(t) - x_o = v_o t$.

D'où l'équation horaire du mouvement : $\mathbf{x(t) = v_o t + x_o}$.

II.7.2- MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

Le mouvement est rectiligne uniformément varié lorsque l'accélération est constante : $\boldsymbol{\vec{\gamma} = \gamma_o \vec{i} = \overrightarrow{cste}}$ (γ_o est une quantité algébrique).

Pour la recherche de l'équation horaire du mouvement, posons les conditions initiales suivantes :

A $t = 0$, $x = x_o$ et $v = v_o$.

$\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \gamma_o\vec{i} = \dfrac{d(v\vec{i})}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{i} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \gamma_o$. On sépare les variables v et t et on intègre :

$dv = \gamma_o dt \Rightarrow \int_{v_o}^{v(t)} dv = \int_0^t \gamma_o dt \Rightarrow v(t) - v_o = \gamma_o t \Rightarrow \mathbf{v(t) = \gamma_o t + v_o}$ qui est l'équation horaire donnant la variation de la vitesse avec le temps.

Recherchons x(t) :

$$v = \frac{dx}{dt} = \gamma_o t + v_o \Rightarrow dx = (\gamma_o t + v_o)dt \Rightarrow \int_{x_o}^{x} dx = \int_0^t (\gamma_o t + v_o)dt \Rightarrow x - x_o = \frac{1}{2}\gamma_o t^2 + v_o t$$

D'où l'équation horaire du mouvement de M : $\mathbf{x(t) = \frac{1}{2}\gamma_o t^2 + v_o t + x_o}$.

II.8- MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL

II.8.1- DEFINITION

Soit un point matériel M se déplaçant sur une droite x'Ox de vecteur unitaire $\vec{i}$.

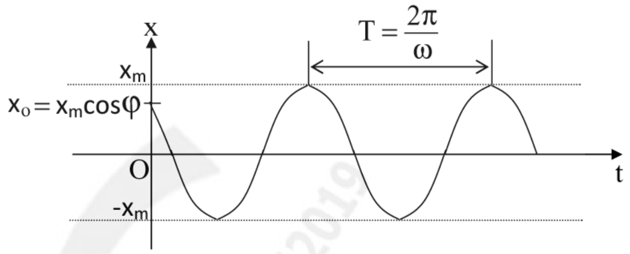
Le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}$, sa vitesse instantanée est $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} = v(t)\vec{i}$ et sont accélération est $\vec{\gamma}(t) = \dot{v}(t)\vec{i} = \gamma(t)\vec{i}$.

(Attention ! Les quantités x(t), v(t) et γ (t) sont des quantités algébriques).

Le mouvement de M est sinusoïdal si son abscisse a pour expression :

$$\mathbf{x(t) = x_m cos(\omega t + \varphi)},$$

où x_m et φ sont des constantes. Cette équation est l'équation horaire du mouvement qui a une allure sinusoïdale.



Remarque :

*On peut aussi écrire l'équation horaire sous la forme : $x(t) = x_m \sin(\omega t + \psi)$, en posant $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$;

en effet : $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = x_m \cos(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}) = x_m \cos(\frac{\pi}{2} - (\omega t + \psi)) = x_m \sin(\omega t + \psi)$.

* x_m est l'amplitude maximale du mouvement :

Au cours du temps, M oscille entre les positions $-x_m$ et $+x_m$ puisque $\cos(\omega t + \varphi)$ varie entre -1 et +1. La trajectoire est donc un segment de droite de longueur $2x_m$.

* $\omega t + \varphi$ est l'angle de phase : il s'exprime en radian et varie au cours du temps.

*La fonction cosinus est périodique de période 2π. Le mouvement est donc périodique dans le temps : il se reproduit identique à lui-même après une période de T secondes.

* ω est la pulsation du mouvement : elle est liée à la fréquence f par la relation $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$ et à la période T par $\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}$. Et on a donc aussi : $\mathbf{f = \frac{1}{T}}$. C'est le nombre de périodes (ou de cycles ou de tours) par unités de temps. Exemple : ω = 20π rd/s alors T = 0,1 s et f = 10 périodes/s.

Les unités : ω en s^{-1}, f en s^{-1} ou Hz (Hertz), T en s.

* φ est la phase à l'origine : sa valeur dépend de la position et du sens dans lequel se déplace le mobile M à l'instant initial t = 0.

Si à t = 0, $x = x_o = x_m \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_o}{x_m}$, soit $\varphi = \arccos\frac{x_o}{x_m}$ (en radian).

II.8.2- VITESSE INSTANTANEE SINUSOIDALE

A l'instant t, le mobile a pour vitesse instantanée : $\mathbf{v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m sin(\omega t + \varphi)}$.

La vitesse est une fonction sinusoïdale du temps, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

II.8.3- ACCELERATION INSTANTANEE SINUSOIDALE

A l'instant t, le mobile a pour accélération instantanée : $\boldsymbol{\gamma = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)}$.

L'accélération est également une fonction sinusoïdale du temps, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Remarque :

$\gamma = -\omega^2 x$, soit : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$: on dit que le mouvement de M est régit par l'équation différentielle de mouvement : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ dont la résolution donne précisément : $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, moyennant la donnée de conditions initiales (Voir chapitre sur la Dynamique).

Exemple : Mouvement d'un point matériel accroché à l'extrémité libre d'un ressort de raideur k sur un plan horizontal, sans frottement. Les conditions initiales sont les suivantes : à t = 0 : $x = a$ et v = 0.
Le point matériel décrit un mouvement oscillant autour de O d'amplitude maximale **a** : c'est un mouvement périodique d'équation : $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

- Recherche de x_m et φ :

$x(t = 0) = x_m \cos\varphi = a$

$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v(t = 0) = -\omega x_m \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Et : $x_m \cos\varphi = x_m = a$

D'où l'équation du mouvement de M : $\boldsymbol{x(t) = a\cos\omega t = a\cos\frac{2\pi}{T}t}$

Durant une période, on a les étapes suivantes :

*A t =0 : M est au point A d'abscisse a.

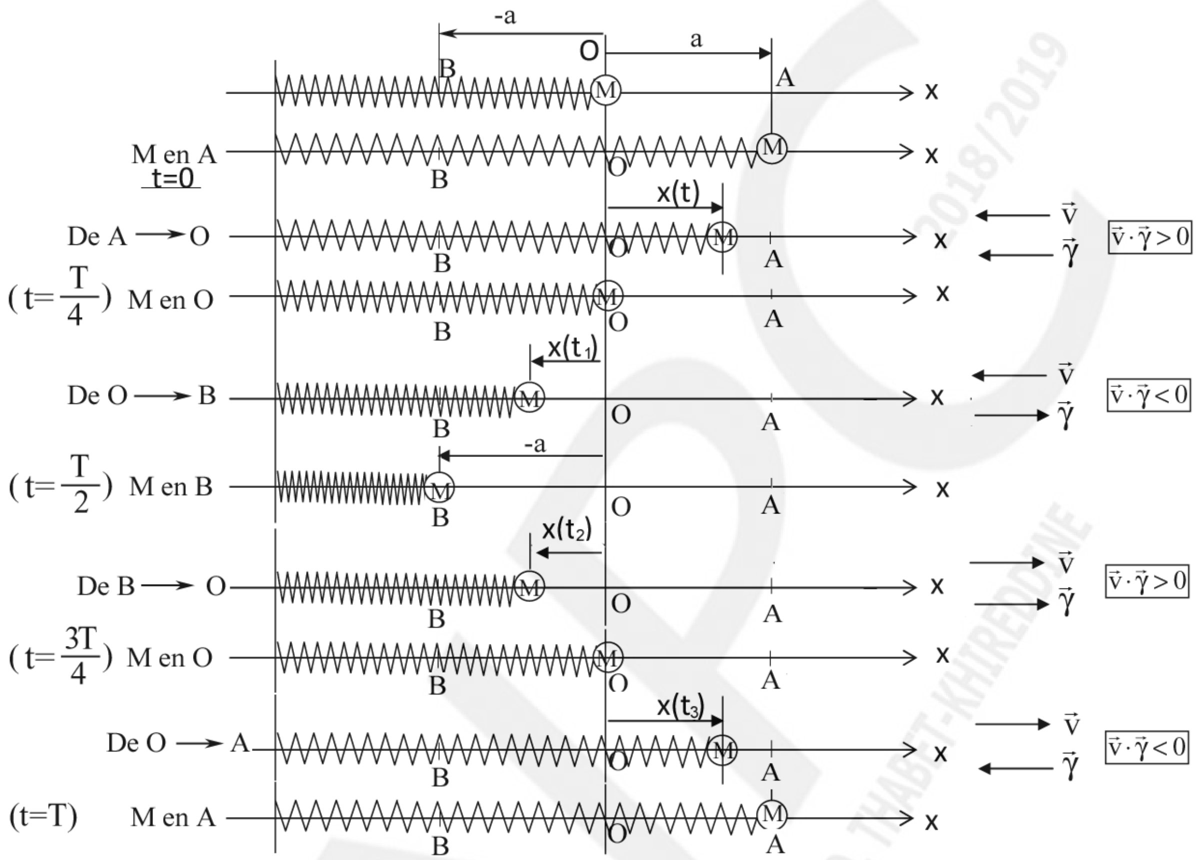
*M effectue un mouvement vers la gauche : entre A et O, $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont dirigées dans le même sens, donc $\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$ et le mouvement est accéléré. Sa vitesse est nulle en A et devient maximale en module en O : $v_{max}(O) = \omega a$.

* entre O et B, toujours vers la gauche : $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont dirigées en sens contraire, donc $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$ et le mouvement est décéléré. La vitesse de M, maximale en O, s'annule en B.

*Arrivé en B, M repart en un mouvement de gauche à droite, entre B et O : $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont dirigées dans le même sens, donc $\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$ et le mouvement est accéléré. Sa vitesse redevient maximale en O.

*Entre O et A, toujours vers la droite : $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont dirigées en sens contraire, donc $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$ et le mouvement est décéléré. La vitesse de M, maximale en O, s'annule en A.

Puis le même mouvement reprend pour la période suivante.

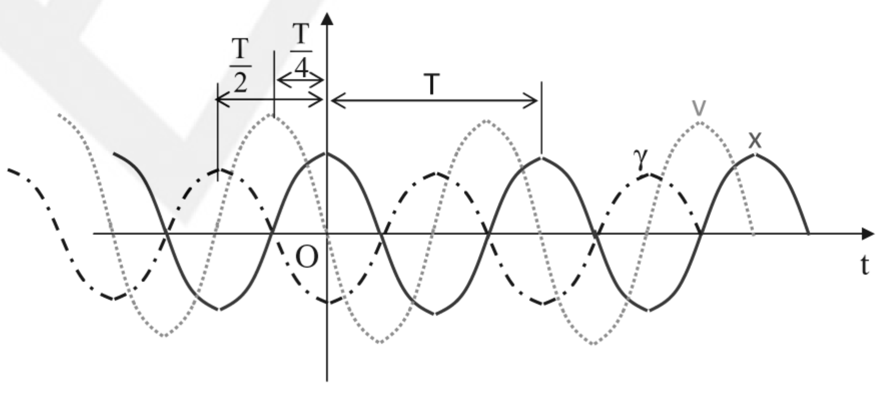


Concernant la vitesse et l'accélération de M :

$$v = -\omega a \sin \omega t = \omega a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega a \cos \omega\left(t + \frac{T}{4}\right) \quad (\text{car} : -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}))$$

$$\gamma = -\omega^2 a \cos \omega t = -\omega^2 x$$

On en déduit que v est en <u>quadrature de phase avance</u> sur x(t) et que γ est en <u>opposition de phase</u> avec x(t) comme le montre la figure ci-dessous :

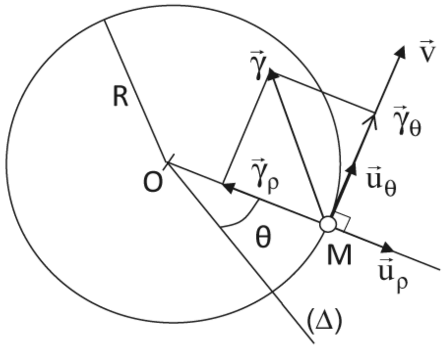


II.9- MOUVEMENT CIRCULAIRE

II.9.1- EXPRESSION DES VECTEURS POSITION, VITESSE ET ACCELERATION

Le point matériel M décrit un mouvement circulaire, le mouvement est donc plan. On peut décrire ce mouvement soit dans le repère polaire, soit dans le repère curviligne.

<u>Dans le repère polaire</u>

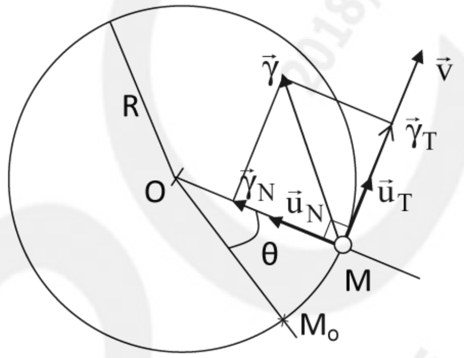


$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho, \quad (\rho = R, \forall t)$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v_\theta\vec{u}_\theta = \vec{v}_\theta,\ v = v_\theta = R\dot{\theta}$

$\vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{\gamma}_\rho + \vec{\gamma}_\theta$

<u>Dans le repère curviligne</u>



$s(t) = R\theta(t)$

$\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{u}_T = R\dot{\theta}\vec{u}_T = v\vec{u}_T,\ v = R\dot{\theta}$

$\vec{\gamma} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N \quad (\mathcal{R}(M) = R)$

$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{u}_T + R\dot{\theta}^2\vec{u}_N = \vec{\gamma}_N + \vec{\gamma}_T$

On en déduit que : $\begin{cases} \vec{u}_N = -\vec{u}_\rho \ ;\ \vec{u}_T = \vec{u}_\theta \\ \|\vec{v}_\theta\| = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta} \\ \|\vec{\gamma}_\theta\| = \|\vec{\gamma}_T\| = R\ddot{\theta} \ ;\ \|\vec{\gamma}_\rho\| = \|\vec{\gamma}_N\| = R\dot{\theta}^2 \end{cases}$

II.9.2- VECTEUR VITESSE ANGULAIRE $\vec{\omega}$

Nous avons défini la vitesse angulaire d'un point matériel en coordonnées polaires comme étant la dérivée première de l'angle de rotation du point M autour du point O : $\dot{\theta}$. Nous allons maintenant définir le vecteur vitesse angulaire noté $\vec{\omega}$ et trouver une relation liant le vecteur vitesse linéaire $\vec{v}$ au vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Soit un point matériel M décrivant un cercle de centre O et de rayon R.

*Le vecteur position de M est : $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho$. (ici, $\rho = R, \quad \forall t$).

*Sa vitesse instantanée est : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d(R\vec{u}_\rho)}{dt} = R\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

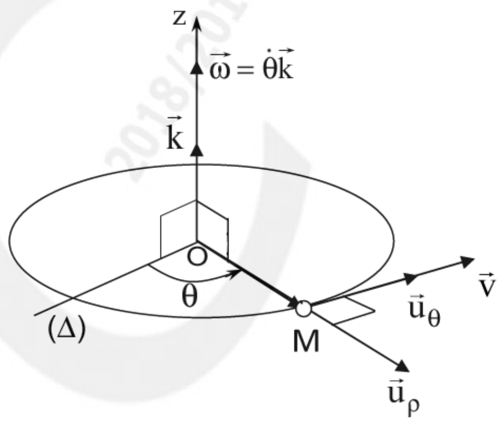
Définissons un vecteur unitaire $\vec{k}$ perpendiculaire au plan contenant $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, tel que le trièdre $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ soit direct. Par permutation circulaire du produit vectoriel, nous avons :

$\vec{u}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{u}_\rho$ et l'on a : $\vec{v} = R\dot{\theta}(\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho) = \dot{\theta}\vec{k} \wedge R\vec{u}_\rho$ (Propriété du produit vectoriel).

Posons : $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$. Le module de $\vec{\omega}$ n'est autre que $\dot{\theta}$: $\|\vec{\omega}\| = \omega = \dot{\theta}$ qui est la vitesse angulaire de M. Aussi, appelle-t-on le vecteur $\vec{\omega}$ vecteur vitesse angulaire de M.

On en déduit la relation entre la vitesse linéaire $\vec{v}$ et le vecteur angulaire $\vec{\omega}$: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}}$.

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ est porté par l'axe de rotation (support de $\vec{k}$) qui est perpendiculaire au plan du mouvement du point matériel M.



*Accélération du point matériel M :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Où $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\vec{k}$ est le vecteur accélération angulaire. D'où l'expression de $\vec{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\vec{\gamma} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

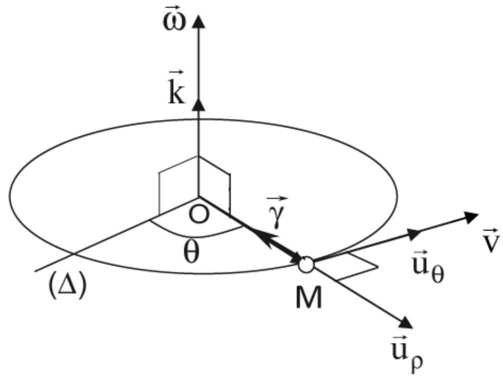
*<u>Cas particulier</u> : mouvement de rotation circulaire uniforme : $\dot{\theta} = \omega = cste \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$. Alors :

$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge R\vec{u}_\rho = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{\gamma} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{OM}$

On en déduit que $\vec{\gamma}$ est dirigé vers le centre de rotation O, donc, quel que soit t, $\vec{\gamma} // \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} \perp \vec{\gamma}$ au cours du mouvement de rotation de M.

(<u>**Attention**</u> ! ici $\|\vec{v}\| = \mathbf{v = R\omega = cste}$ et $\|\vec{\gamma}\| \neq 0$).



II.10- MOUVEMENT A ACCELERATION CENTRALE

II.10.1- DEFINITION GENERALE

Un point matériel M est animé d'un mouvement à accélération centrale s'il existe un point C fixe dans l'espace tel que $\overrightarrow{\mathbf{CM}} // \vec{\boldsymbol{\gamma}}$ ou bien $\overrightarrow{\mathbf{CM}} \wedge \vec{\boldsymbol{\gamma}} = \vec{\mathbf{0}}$ quel que soit t. $\vec{\gamma}$ est alors dirigé vers le point C qui est appelé centre des accélérations.

Exemple : Mouvement circulaire uniforme (voir ci-dessus) : Le mouvement de M est à accélération centrale puisque O et fixe et que $\overrightarrow{OM} // \vec{\gamma}$ quel que soit t.

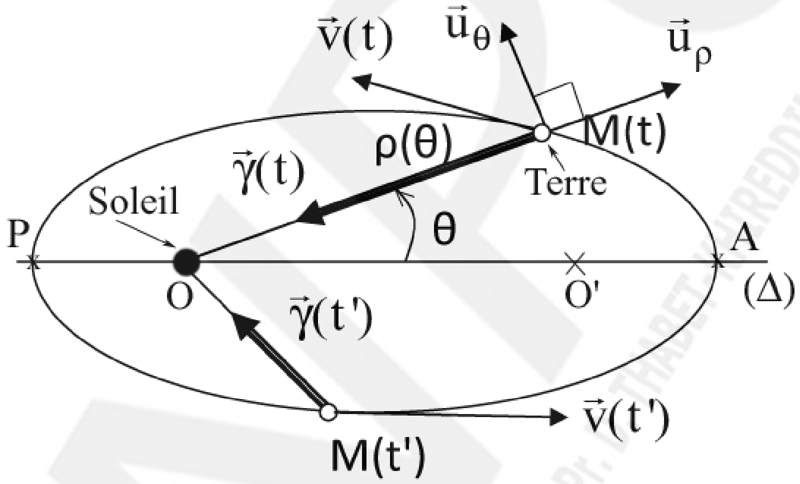
II.10.2- LOI DES AIRES

Comme exemple de mouvement à accélération centrale, considérons le mouvement de la planète Terre autour du Soleil (étoile) :

*La trajectoire est elliptique et le Soleil occupe l'un des foyers O de l'ellipse (1ère loi de Képler).

*O (Soleil) est le centre des accélérations.

*Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ balaie des surfaces égales durant des intervalles de temps égaux. C'est ce qu'on appelle la « loi des aires » (2ème loi de Képler).



Remarque : En fait, la vitesse de la Terre n'est pas tout à fait constante : par exemple, à l'aphélie (A), sa vitesse est 29,4km/s et à la périhélie (P), elle est de 30,4km/s. Sa vitesse moyenne est 30km/s soit 106000km/h.

Démonstration :

$\forall t, \overrightarrow{OM} // \vec{\gamma} \Rightarrow \ \vec{\gamma} = \gamma_\rho \vec{u}_\rho$ et $\gamma_\theta = 0$, soit : $\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$, en utilisant les coordonnées polaires (repère le plus adéquat).

$\rho\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = -2\dot{\theta}\dfrac{d\rho}{dt}$: c'est une équation différentielle que l'on va résoudre :

$$\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \int -2\frac{d\rho}{\rho} + C_o \Rightarrow Ln\dot{\theta} = -2Ln\rho + C_o = Ln\frac{1}{\rho^2} + C_o,$$

où C_o est la constante d'intégration. Pour plus de commodité dans les calculs, posons que $C_o = LnC$.

Alors : $\mathrm{Ln}\dot{\theta} = \mathrm{Ln}\dfrac{1}{\rho^2} + C_o = \mathrm{Ln}\dfrac{1}{\rho^2} + \mathrm{Ln}C = \mathrm{Ln}\dfrac{C}{\rho^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{C}{\rho^2}$

On en déduit la relation suivante entre la vitesse angulaire et la position du point M :

$\boldsymbol{\rho^2\dot{\theta} = C}$ appelée la **<u>loi des aires</u>** (**C** est la « Constante des aires »)

$\rho^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{ds}{dt}$; $\boldsymbol{\dfrac{ds}{dt}}$ est la **vitesse aérolaire** (qui est constante) en m^2/s.

Cette loi signifie que le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ balaie des surfaces égales durant des intervalles de temps égaux.

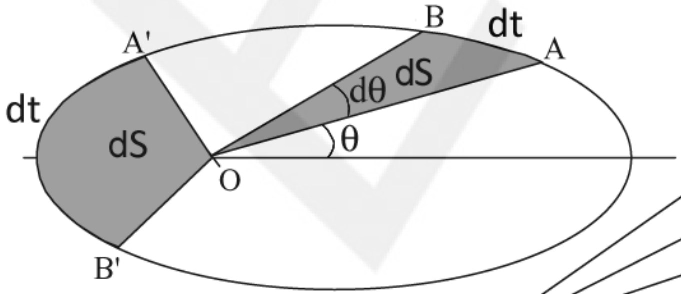
Durant l'intervalle de temps infiniment petit dt, le point M parcours l'arc de trajectoire AB. OM balaie la surface infinitésimale dS. Calculons dS en faisant les approximations suivantes sachant que l'arc AB est infiniment petit : la surface du secteur OAB est voisine de celle du secteur OCB (sur le cercle de rayon ρ) dont l'aire est voisine de celle du triangle OCB. Donc, on peut écrire que :

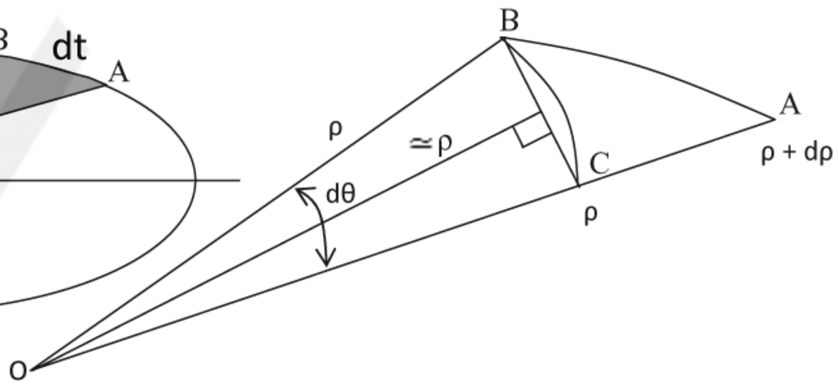
$$dS = dS_{OAB} \approx dS_{OCB} \approx dS_{\text{triangle OCB}} = \frac{1}{2}\rho \times 2\rho \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$$

$d\theta$ étant très petit, on fait l'approximation : $\sin\left(\dfrac{d\theta}{2}\right) \approx \dfrac{d\theta}{2}$, alors : $dS \approx \rho^2 \dfrac{d\theta}{2}$.

L'aire balayée par unité de temps est : dS/dt, soit : $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}\rho^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$ (c'est-à-dire que l'aire balayée pendant dt est $\rho^2\dfrac{d\theta}{2}$).

Comme $\rho^2\dot{\theta}$ est constant d'après la loi des aires, on déduit que $\dfrac{dS}{dt} = cste$. Ainsi, l'aire balayée dS entre A' et B' est la même que celle balayée entre A et B durant <u>le même temps</u> dt.





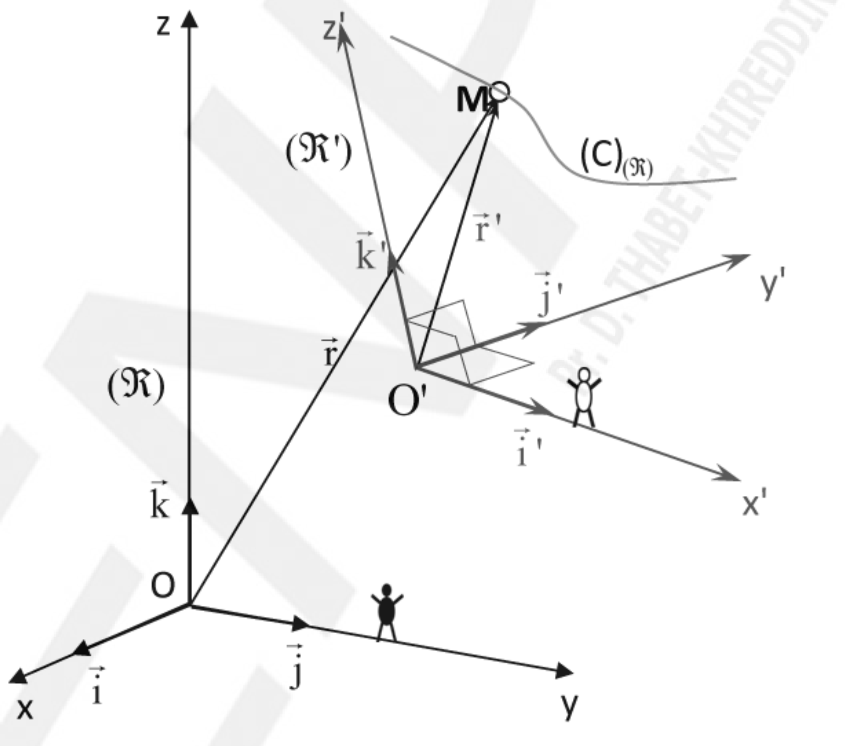
II.11- MOUVEMENT RELATIF-CHANGEMENT DE REFERENTIEL

II.11.1- INTRODUCTION

Un point M décrit une trajectoire dans l'espace. Par rapport à un certain repère, nous pouvons déterminer sa position, sa vitesse et son accélération.

Nous pouvons également choisir un autre repère en mouvement par rapport au premier et y déterminer ces mêmes grandeurs. L'objet de ce paragraphe est de déterminer les relations qui lient les grandeurs établies dans le premier repère à celles établies dans le second.

Soit donc un repère noté $(\Re)(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ supposé fixe dans l'espace et un autre noté $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ qui se déplace par rapport à $(\Re)$. $(\Re)$ est appelé repère absolu, $(\Re')$ repère relatif. Les observateurs liés respectivement à $(\Re)$ et à $(\Re')$ mesurerons *a priori* des vitesses et des accélérations différentes, de même, ils ne verront pas les mêmes trajectoires. Sur la figure, par exemple, la trajectoire (C) du point matériel M représentée ici est celle vue par un observateur situé dans le repère $(\Re)$.



<u>Exemple</u> : deux voitures A et B roulent à la même vitesse sur une route rectiligne. Soit un observateur dans la voiture A, et un autre C debout au bord de la route. Quelle est la vitesse de la voiture B ?

Soit $(\Re)$ un repère fixe lié à la route (donc à C) et soit $(\Re')$ le repère mobile lié à la voiture A.

Pour l'observateur immobile C, la voiture B a une certaine vitesse v. Mais pour l'observateur A, la vitesse de la voiture B est nulle puisqu'il se déplace à la même vitesse. <u>Tous les deux ont raison !</u> : v(B)

= 0 pour l'observateur A et v(B) = v différente de zéro pour l'observateur fixe C. Donc, on peut parler de relativité du mouvement.

II.11.2- GRANDEURS ABSOLUES

Ce sont les grandeurs cinématiques associées au point matériel M calculées par un observateur situé dans le repère absolu $(\Re)(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

***vecteur position absolue :**

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_{(\Re)} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

***vecteur vitesse absolue:**

$$\vec{v}(M)_{(\Re)} = \vec{v}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(\Re)} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M)_{(\Re)} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}$$

***vecteur accélération absolue:**

$$\vec{\gamma}(M)_{(\Re)} = \left.\frac{d\vec{v}(M)_{(\Re)}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}_{(\Re)}}{dt^2}\right|_{(\Re)} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M)_{(\Re)} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}}$$

<u>Remarque</u> : le repère $(\Re)$ étant fixe, son origine est fixe et ses vecteurs de base le sont également :

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{0}, \quad \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{0}, \quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{0}$$

II.11.3- GRANDEURS RELATIVES

Ce sont les grandeurs cinématiques du point matériel M calculées par un observateur situé dans le repère relatif $(\Re')(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

Bien entendu, par rapport à l'observateur situé dans $(\Re')$, ce repère est fixe et les vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$ sont fixes également, donc de dérivés nulles par rapport à ce repère.

***vecteur position relative :**

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_{(\Re')} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'}$$

***vecteur vitesse relative:**

C'est le vecteur vitesse instantanée du point matériel M calculé dans le repère $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

$$\vec{v}(M)_{(\Re')} = \vec{v}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re')} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\boxed{\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M)_{(\Re')} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'}$$

***vecteur accélération relative:**

C'est le vecteur accélération instantanée du point matériel M calculé dans le repère $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

$$\vec{\gamma}(M)_{(\Re')} = \left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_{(\Re')} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}_{(\Re')}}{dt^2}\right|_{(\Re')} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M)_{(\Re')} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'}$$

II.11.4- CARACTERISATION DU MOUVEMENT D'UN REPERE MOBILE

Le repère mobile $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ comprend une origine, le point O', et un trièdre composé de trois axes (O'x', O'y', O'z') muni d'une base $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$. Le trièdre peut être considéré comme un solide composé de points P, y compris le point O'.

Dans cet esprit, un mouvement quelconque de $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ par rapport à $(\Re)(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ peut être généralement décomposé en deux mouvements :

*le mouvement de translation curviligne de l'origine O' par rapport au repère $(\Re)$: on peut déterminer sa vitesse et son accélération par rapport à $(\Re)$,

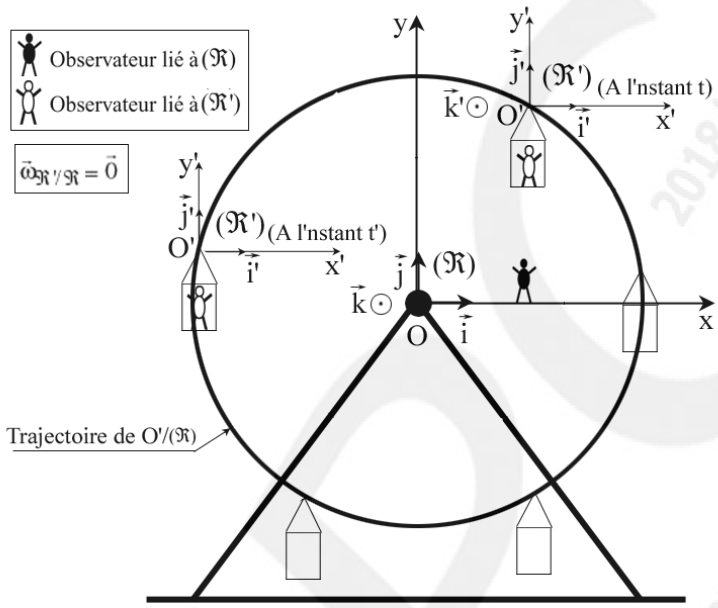
*le mouvement <u>d'ensemble des points du solide</u> représenté par le repère $(\Re')$ par rapport au repère $(\Re)$ en fixant O' : les vecteurs $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ liés au solide tournent à la même vitesse angulaire par rapport à ceux de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note $\boldsymbol{\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}$ le vecteur vitesse angulaire du repère $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ par rapport à $(\Re)(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Exemples montrant un cas où $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$ et un cas où $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \neq \vec{0}$:

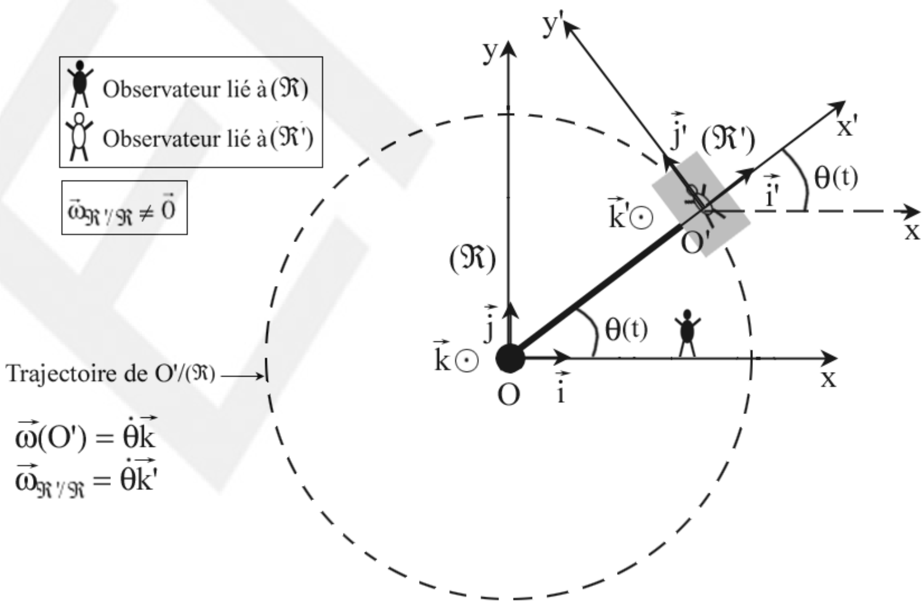
1/ La « Grande Roue » : Le repère fixe $(\Re)(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est lié au centre O de la roue. La nacelle reste verticale. Le repère mobile lié au passager est $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ avec $\vec{k}'//\vec{k}$. Pendant la rotation de la

« grande roue », les vecteurs $\vec{i}\,'$ et $\vec{j}\,'$ restent toujours parallèles respectivement à $\vec{i}$ et $\vec{j}$. O' est animé d'un mouvement circulaire autour de O.

Alors : $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$: $\vec{\omega}_{\text{axes de }\Re'/\Re} = \vec{0}$, mais $\vec{\omega}_{O'/\Re} \neq \vec{0}$.

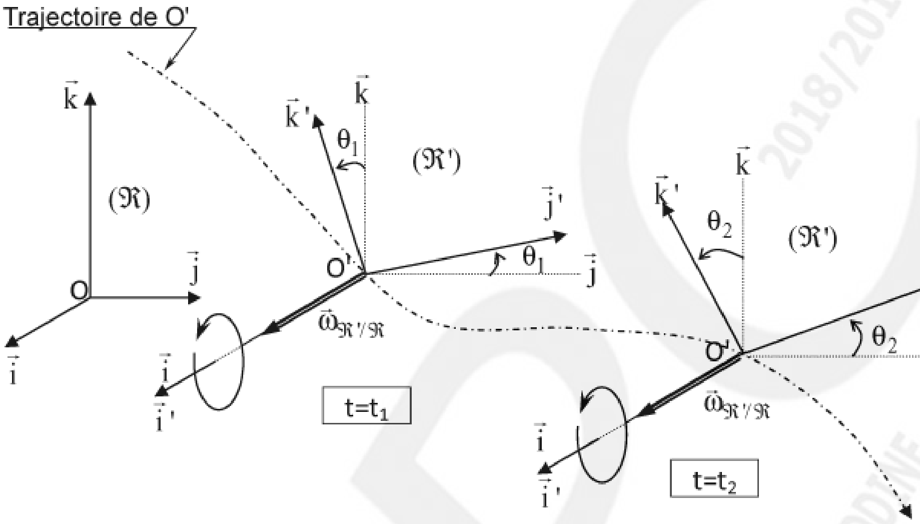


2/ Le manège : un enfant est assis dans une voiturette qui est solidaire de la barre OO' repérée par l'angle θ dans le repère $(\Re)(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Celle-ci tourne autour de O. $(\Re')(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ est liée à la voiturette avec $\vec{k}'//\vec{k}$. L'enfant est immobile dans celle-ci, donc dans $(\Re')$. Les vecteurs $\vec{i}\,'$ et $\vec{j}\,'$ tournent dans le plan par rapport à $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Donc : $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \neq \vec{0}$.



II.11.5- LOI FONDAMENTALE DE LA DERIVATION VECTORIELLE

Considérons le repère mobile $(\mathfrak{R}')$ tel que, à chaque instant, $\vec{i}\,'$ reste parallèle au vecteur $\vec{i}$ du repère $(\mathfrak{R})$: $(\mathfrak{R}')$ tourne autour de l'axe Ox de $(\mathfrak{R})$. $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}$ est le vecteur rotation de $(\mathfrak{R}')$ par rapport à $(\mathfrak{R})$. On peut faire la représentation suivante :



Exprimons la variation temporelle du vecteur $\vec{j}\,'$ par rapport au repère $(\mathfrak{R})$, soit : $\left.\dfrac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})}$.

Par rapport au repère $(\mathfrak{R})$, le vecteur $\vec{j}\,'$ n'est pas constant : sa direction varie avec le temps. En effet, il tourne autour de l'axe Ox avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. La dérivée de $\vec{j}\,'$ par rapport à $(\mathfrak{R})$ donne :

$$\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})} = \left.\frac{d\vec{j}\,'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})} = \dot{\theta}\vec{k}\,' = \dot{\theta}(\vec{i}\,'\wedge\vec{j}\,') = (\dot{\theta}\vec{i}\,')\wedge\vec{j}\,' = \vec{\omega}\wedge\vec{j}\,'$$

Comme explicité ci-dessus, tous les points du solide lié à $(\mathfrak{R}')$ tournent autour de l'axe Ox de $(\mathfrak{R})$ avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{i} = \dot{\theta}\vec{i}\,'$ qui est donc le vecteur rotation de $(\mathfrak{R}')$ par rapport à $(\mathfrak{R})$ $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \dot{\theta}\vec{i}\,'$.

D'où la relation : $\left.\dfrac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})} = \vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}\wedge\vec{j}\,'$ et de même, on trouve que $\left.\dfrac{d\vec{k}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})} = \vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}\wedge\vec{k}\,'$.

Pour ce qui concerne $\left.\dfrac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})}$, $\vec{i}\,'$ étant un vecteur constant dans $(\mathfrak{R})$ donc $\left.\dfrac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})} = \vec{0}$. Mais on a aussi $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}\wedge\vec{i}\,' = \vec{0}$ car $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} // \vec{i}\,'$. On peut aussi écrire que $\left.\dfrac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(\mathfrak{R})} = \vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}\wedge\vec{i}\,'$.

On peut démontrer dans le cas général d'un mouvement quelconque de $(\Re')$ par rapport à $(\Re)$, les relations établies ci-dessus :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{i}\,'}, \quad \boxed{\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{j}\,'} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{k}\,'} \quad (1)$$

Nous allons utiliser ces relations pour établir la relation qui lie la dérivée d'un vecteur $\vec{A}(t)$ de l'espace effectuée dans deux repères différents, l'un fixe $(\Re)$, l'autre mobile $(\Re')$.

$\vec{A}(t)$ exprimé dans le repère $(\Re)$ donne : $\vec{A}_{(\Re)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$,

$\vec{A}(t)$ exprimé dans le repère $(\Re')$ donne : $\vec{A}_{(\Re')} = x'(t)\vec{i}\,' + y'(t)\vec{j}\,' + z'(t)\vec{k}\,'$.

Effectuons la dérivée de $\vec{A}(t)_{(\Re')}$ dans le repère $(\Re)$: les vecteurs $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ et $\vec{k}\,'$ étant mobile dans le repère $(\Re)$, leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'\right) + \left(x'\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} + y'\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} + z'\left.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right|_{(\Re)}\right)$$

Dans $(\Re')$, les vecteurs $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ et $\vec{k}\,'$ sont fixes, donc leurs dérivées par rapport au temps sont nulles :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(\Re')} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'$$

En utilisant les relations (1) ci-dessus, on a :

$$x'\left.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} + y'\left.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} + z'\left.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right|_{(\Re)} = x'\left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{i}\,'\right) + y'\left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{j}\,'\right) + z'\left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{k}\,'\right) =$$

$$= \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\right) = \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{A}$$

Finalement, on trouve que :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{(\Re')} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{A}}$$

II.11.6- LOI DE COMPOSITION DES VITESSES

Il s'agit d'exprimer le vecteur vitesse absolue $\vec{v}_a(M)$ en fonction du vecteur vitesse relative $\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M)_{(\Re')}$; Sachant que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ (relation de Chasles) :

$$\vec{v}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(\Re)} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re)}$$

* $\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{v}(O')_{(\Re)}$: vitesse absolue de l'origine O' de $(\Re')$ donc calculée par rapport à $(\Re)$.

*En appliquant la loi de dérivation vectorielle sur $\overrightarrow{O'M}$, on obtient :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re')} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}(M)_{(\Re')} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left[\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re')}\right] + \left[\vec{v}(O')_{(\Re)} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}\right]$$

D'où la loi de composition des vitesses : $\boxed{\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(\Re'/\Re)}$

Avec : * $\vec{v}_r(M) = \left[\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re')}\right]$: vitesse relative de M par rapport à $(\Re')$.

* $\vec{v}_e(\Re'/\Re) = \vec{v}(O')_{(\Re)} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}$: vitesse d'entraînement de $(\Re')$ par rapport à $(\Re)$.

<u>Remarque</u> concernant la vitesse d'entraînement que nous avons noté $\vec{v}_e(\Re'/\Re)$:

On définit le point coïncidant, noté M^*, comme étant le point :

1/ FIXE dans $(\Re')$: $\vec{v}(M^*)_{(\Re')} = \vec{0}$,

2/ qui coïncide avec le point matériel (le mobile) M à l'instant t considéré.

Bien noter que ce point M^* est un point géométrique, puisqu'il est fixe dans $(\Re')$, et non pas un point matériel comme M. Donc, d'après la loi de composition des vitesses, la vitesse de M^* par rapport au repère absolu est : $\vec{v}(M^*)_{(\Re)} = \vec{v}(M^*)_{(\Re')} + \vec{v}(O')_{(\Re)} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M^*} = \vec{0} + \vec{v}(O')_{(\Re)} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M^*} \equiv \vec{v}_e(M)$

avec $M^*(t) = M(t)$.

On retrouve bien l'expression de la vitesse d'entrainement que nous avions noté $\vec{v}_e(\Re'/\Re)$.

Relativement au point coïncidant, on peut définir la vitesse d'entraînement du point M, noté $\vec{v}_e(M)$, comme étant la vitesse qu'**aurait** le point M dans le repère absolu $(\Re)$ si M était fixe dans $(\Re')$.

Dans ce cours, on continuera cependant à noter la vitesse d'entraînement de $(\Re')$ par rapport à $(\Re)$: $\vec{v}_e(\Re'/\Re)$.

II.11.7- LOI DE COMPOSITION DES ACCELERATIONS

Il s'agit d'exprimer le vecteur accélération absolu $\vec{\gamma}_a(M)$ en fonction du vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M)_{(\Re')}$:

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M)_{(\Re)} = \left.\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right|_{(\Re)} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}(O')_{(\Re)} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}_r\right]_{(\Re)}$$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \left.\frac{d}{dt}\vec{v}(O')_{(\Re)}\right|_{(\Re)} + \left.\frac{d\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right|_{(\Re)} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re)} + \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{(\Re)}$$

* $\left.\frac{d}{dt}\vec{v}(O')_{(\Re)}\right|_{(\Re)} = \vec{\gamma}(O')_{(\Re)}$: accélération absolue de l'origine O' de $(\Re')$ calculée par rapport à $(\Re)$.

* $\left.\frac{d\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right|_{(\Re')} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right|_{(\Re')} = \frac{d\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_{\Re'/\Re}$

$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{\omega}_{\Re'/\Re}}{dt}\right|_{(\Re)} \wedge \overrightarrow{O'M} = \dot{\vec{\omega}}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}$

* $\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re')} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_r(M) + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$\Rightarrow \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$

* $\left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{(\Re)} = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{(\Re')} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{v}_r$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \left[\left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{(\Re')}\right] + \left[\vec{\gamma}(O')_{(\Re)} + \dot{\vec{\omega}}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right] + \left[2\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{v}_r\right]$$

D'où la loi de composition des accélération :

$$\boxed{\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) + \vec{\gamma}_c(M)}$$

Avec :

* $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M)_{(\Re')} = \left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_{(\Re')}$: C'est l'accélération relative de M.

* $\vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) = \vec{\gamma}(O')_{(\Re)} + \dot{\vec{\omega}}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$:

C'est l'accélération d'entraînement du repère $(\Re')$ par rapport au repère $(\Re)$.

* $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{v}_r$: c'est l'accélération complémentaire ou accélération de Coriolis.

<u>Remarques</u> : cas particuliers :

1/ Le repère $(\Re')$ n'effectue pas de mouvement de rotation par rapport à $(\Re)$, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ont des directions fixes par rapport à $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{0};\ \left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{0};\ \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(\Re)} = \vec{0}$, donc : $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$.

On en déduit que :

- $\vec{v}_e(\Re'/\Re) = \vec{v}(O')_{(\Re)}$ et $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}(O')_{(\Re)}$
- $\vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) = \vec{\gamma}(O')_{(\Re)}$ et $\vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}$, d'où : $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}(O')_{(\Re)}$

2/ Le point matériel est immobile par rapport au repère $(\Re')$: $\vec{v}_r(M) = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{0}$, d'où :

- $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_e(\Re'/\Re) = \vec{v}(O')_{(\Re)} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}$
- $\vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) = \vec{\gamma}(O')_{(\Re)} + \dot{\vec{\omega}}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \left(\vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$

3/ Le repère $(\Re')$ effectue un mouvement de **translation rectiligne uniforme** (sans rotation des axes) :

$\vec{v}(O')_{(\Re)} = \overrightarrow{Cste} = \vec{v}_o$ et $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$.

D'où : $\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}(O') = \vec{v}_r + \vec{v}_o \\ \vec{\gamma}(O')_{(\Re)} = \vec{0},\ \vec{\gamma}_e(\Re'/\Re) = \vec{0} \text{ et } \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0} \end{cases}$

On en déduit que : $\boxed{\boldsymbol{\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M)}}$.

La conclusion importante que l'on peut énoncer est la suivante : si deux repères sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, alors les accélérations d'un point matériel M mesurées dans l'un ou l'autre de ces repères, sont égales. C'est précisément ce type de repères que l'on appelle « repères galiléens » et qui sont à la base de la mécanique classique : les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes par changement de repères galiléens. C'est l'objet du prochain chapitre.