SOMMAIRE

CHAPITRE I- Calcul vectoriel & systèmes de coordonnées

I- Calcul vectoriel & systèmes de coordonnées

I.1- INTRODUCTION

En physique, nous utilisons deux types de grandeurs :

- Les grandeurs scalaires : elles sont entièrement déterminées par un nombre réel suivi d'une unité. Exemples : Température (20°C), Temps (10 s), masse (20 kg),…
- Les grandeurs vectorielles : elles nécessitent en plus d'une grandeur scalaire positive (appelée module ou norme), la définition d'un support et d'un sens. Exemples : vecteur vitesse $\vec{v}$, vecteur force $\vec{F}$, vecteur champ électrique $\vec{E}$,…

La physique repose sur des lois et des théorèmes mathématiques qui nécessitent très souvent la connaissance et l'utilisation du calcul vectoriel. Exemples : $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, $\vec{F} = q\vec{E}$, $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$,…

I.2- DEFINITION DU VECTEUR

Au préalable, il faut définir deux espaces afin de pouvoir définir mathématiquement le vecteur :

- L'espace qui nous entoure est représenté par un espace affine (formé de points) euclidien (on peut définir la distance entre deux points), noté A^3.
- L'espace vectoriel de dimension 3, noté E^3 est associé à A^3.

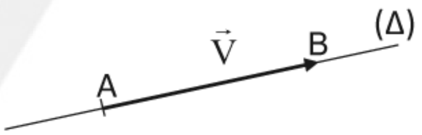
Le vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$ de l'espace E^3, sera défini par un couple de points ordonnés (A,B), ou bipoint, de l'espace A^3 de la manière suivante :

1/ Le support du vecteur est la droite (Δ) qui porte les points A et B.

2/ Le sens du vecteur qui est de A vers B, A étant l'origine du vecteur, B son extrémité.

3/ Le module du vecteur, noté $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui est l'intensité de la grandeur physique représentée par ce vecteur.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut également être noté par une seule lettre, par exemple : $\vec{V}$.

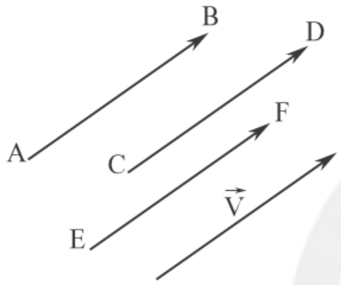


Il existe différents types de vecteurs :

I.2.1- VECTEUR LIBRE

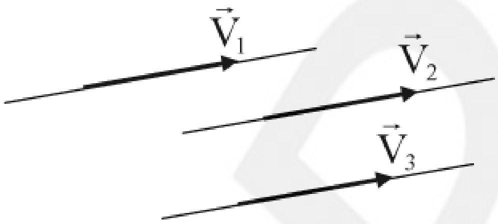
C'est un vecteur dont le module et le sens sont fixés mais pas l'origine et le support.

Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont les représentants du vecteur libre $\vec{V}$.



I.2.2-VECTEURS EQUIPOLLENTS

Ce sont des vecteurs libres qui possèdent le même module, le même sens et dont les supports sont parallèles. Dans ce cas, on parle de vecteurs égaux.

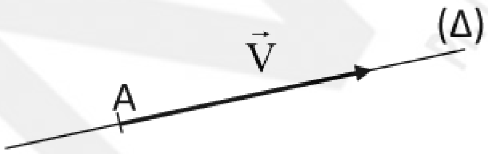


$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}_3$$

Exemple : le champ de pesanteur $\vec{g}$, localement et au voisinage de la surface de la Terre.

I.2.3-VECTEUR LIE

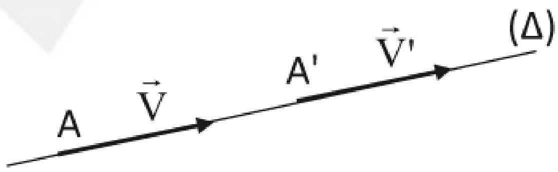
C'est un vecteur noté $(A, \vec{V})$ dont l'origine A (point d'application du vecteur) est définie sur le support (Δ).



Exemple : le poids d'un corps $(G, \vec{P})$ est lié à son centre de gravité G.

I.2.4- VECTEUR GLISSANT

C'est un vecteur $\vec{V}$ dont on définit le support (Δ), le sens et le module, son point d'application n'étant pas défini. Donc, tous les vecteurs situés sur le support (Δ) qui ont même module et même sens que $\vec{V}$ sont équivalents.



Exemple : la tension $\vec{T}$ d'un fil inextensible de masse négligeable.

I.3- VECTEUR UNITAIRE ASSOCIE A UN VECTEUR ET PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN AXE

I.3.1- DEFINITION D'UN VECTEUR UNITAIRE

On appelle vecteur unitaire $\vec{u}$ associé au vecteur $\vec{V}$, le vecteur : $\vec{u} = \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

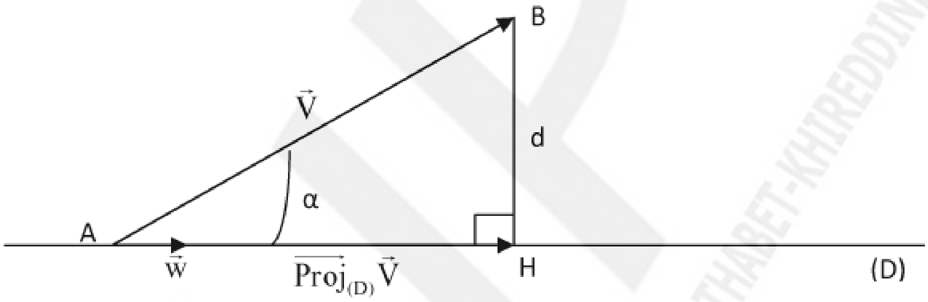
Son module est $\|\vec{u}\| = 1$, son support est la droite (Δ) et son sens celui de $\vec{V}$.

I.3.2- PROJECTION ORTHOGONALE D'UN VECTEUR SUR UNE DROITE

Soit un vecteur $\vec{V}$ dans l'espace et une droite (D) faisant un angle α avec $\vec{V}$. La projection orthogonale <u>algébrique</u> de $\vec{V}$ sur la droite (D) est le scalaire positif, négatif ou nul :

$$\overline{\text{Proj}}_{(D)}\vec{V} = \overline{AH} = \|\vec{V}\|\cos\alpha$$

où H est la projection orthogonale du point B sur la droite (D) avec $A \in (D)$



En définissant un vecteur unitaire $\vec{w}$ sur (D), nous pouvons alors écrire la projection orthogonale <u>vectorielle</u> de $\vec{V}$ sur (D) par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{\text{Proj}}_{(D)}\vec{V} = \overrightarrow{AH} = \left(\|\vec{V}\|\cos\alpha\right)\vec{w} = \|\vec{V}\|\cos\alpha\ \vec{w}$$

C'est le vecteur projeté du vecteur $\vec{V}$ sur la droite (D).

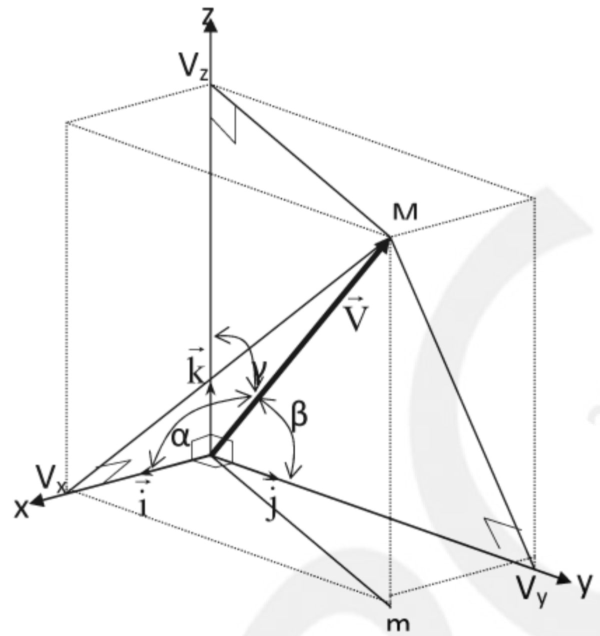
<u>Remarque</u> : d=BH représente la plus petite distance de B à (D), soit : $d = \|\vec{V}\|\sin\alpha$.

I.4- COMPOSANTES D'UN VECTEUR DANS UN REPERE ORTHONORME

Le repère orthonormé est représenté par trois axes (Ox, Oy, Oz) perpendiculaires deux à deux, munis de trois vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ respectivement. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitue la base directe du repère. Les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont les projections orthogonales V_x, V_y et V_z sur les trois axes respectivement. On écrit alors :

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

où le module de $\vec{V}$ est : $$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\ .$$



D'autre part : $$V_x = \|\vec{V}\|\cos\alpha,\ V_y = \|\vec{V}\|\cos\beta,\ V_z = \|\vec{V}\|\cos\gamma$$

$$\alpha = (\vec{i}, \vec{V}), \quad \beta = (\vec{j}, \vec{V}) \text{ et } \gamma = (\vec{k}, \vec{V})$$

On appelle $\cos\alpha, \cos\beta$ et $\cos\gamma$ les **cosinus directeurs** du support de $\vec{V}$ dans le repère (Oxyz).

Les composantes du vecteur unitaire de $\vec{V}$, noté $\vec{u}$, sont :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}}{\|\vec{V}\|} = \frac{V_x}{\|\vec{V}\|}\vec{i} + \frac{V_y}{\|\vec{V}\|}\vec{j} + \frac{V_z}{\|\vec{V}\|}\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

On remarque que les cosinus directeurs de $\vec{V}$ sont les composantes de son vecteur unitaire $\vec{u}$.

On en déduit la relation entre les cosinus directeurs, puisque $\|\vec{u}\| = 1$:

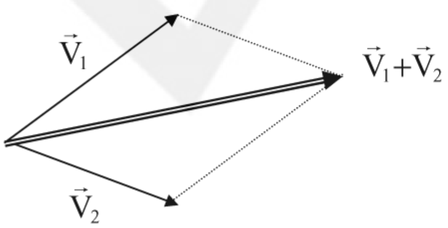
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

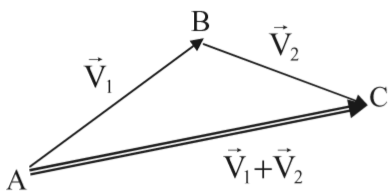
<u>Remarque</u> : Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé repère cartésien (on y reviendra à la suite du cours).

I.5- OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES VECTEURS LIBRES

I.5.1- SOMME VECTORIELLE

a) Somme de deux vecteurs :

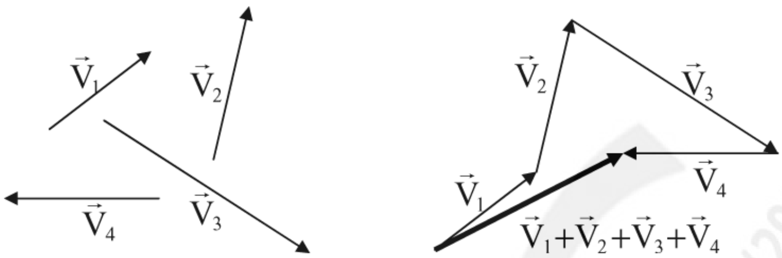




Règle du parallélogramme

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) Somme de plusieurs vecteurs :



c) Expression analytique de la somme vectorielle :

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ définis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

Alors : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

Soit, pour plusieurs vecteurs :

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\vec{i} + \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha\vec{j} + \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha\vec{k}$$

d) Propriétés de la somme vectorielle :

* Commutativité : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

* Associativité : $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$

*Existence d'un élément neutre : $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$: $\vec{0}$ est le vecteur nul avec $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

<u>Remarque</u> : D'une manière générale : $\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\| \neq \left\|\vec{V}_1\right\| + \left\|\vec{V}_2\right\|$

Cas particulier : $\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\| = \left\|\vec{V}_1\right\| + \left\|\vec{V}_2\right\|$ si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles et de même sens.

I.5.2- MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{V} \in E^3$. Alors $\vec{V}' = \lambda\vec{V}$ représente un vecteur appartenant à E^3 tel que :

- Son module est $\left\|\vec{V}'\right\| = |\lambda| \left\|\vec{V}\right\|$,
- Son support est celui de $\vec{V}$, c'est-à-dire que $\vec{V}' // \vec{V}$,
- Son sens est celui de $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ et opposé à celui de $\vec{V}$ si $\lambda < 0$.

On peut alors définir :

- deux vecteurs égaux : $\vec{V}' = \vec{V}$ si $\lambda = 1$
- et deux vecteurs opposés : $\vec{V}' = -\vec{V}$ si $\lambda = -1$

Propriété de distributivité : $(\lambda+\lambda')\vec{V}=\lambda\vec{V}+\lambda'\vec{V}$

$$\lambda(\vec{V}+\vec{V}')=\lambda\vec{V}+\lambda\vec{V}'$$

I.6- PRODUIT SCALAIRE

I.6.1- DEFINITION

Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et φ l'angle compris entre eux. On définit le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme suit :

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\|\vec{\mathbf{a}}\|\times\|\vec{\mathbf{b}}\|\mathbf{cos\varphi}}$$

I.6.2- PROPRIETES

* Commutativité : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

* Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

* Associativité par rapport à la multiplication par un nombre réel λ : $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

* Le produit scalaire n'est pas associatif : $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})\neq(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ car $\lambda\vec{a}\neq\lambda'\vec{c}$ avec $\lambda=\vec{b}\cdot\vec{c}$ et $\lambda'=\vec{a}\cdot\vec{b}$

* Condition d'orthogonalité de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\cos\phi=0\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

* Si $\vec{a}=\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\|\vec{a}\|.\|\vec{a}\|=\|\vec{a}\|^2\Rightarrow\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$.

I.6.3- EXPRESSION ANALYTIQUE

Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tels que :

$$\vec{a}=a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_X\vec{i}+b_Y\vec{j}+b_Z\vec{k}$$

Sachant que : $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{i}^2=\|\vec{i}\|^2=1,\ \vec{j}^2=\|\vec{j}\|^2=1,\ \vec{k}^2=\|\vec{k}\|^2=1$

Le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_X\vec{i}+a_Y\vec{j}+a_Z\vec{k})\cdot(b_X\vec{i}+b_Y\vec{j}+b_Z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}^2+a_yb_y\vec{j}^2+a_zb_z\vec{k}^2$$

Soit l'expression analytique du produit scalaire :

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\mathbf{a_Xb_X}+\mathbf{a_Yb_Y}+\mathbf{a_Zb_Z}}$$

<u>Remarques</u> :

1/ Comme $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\varphi$, on peut calculer l'angle compris entre les deux vecteurs, soit :

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\times\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_Z^2}}}$$

2/ Expression analytique de la condition d'orthogonalité : $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0}$

3/ Expressions des cosinus directeurs :

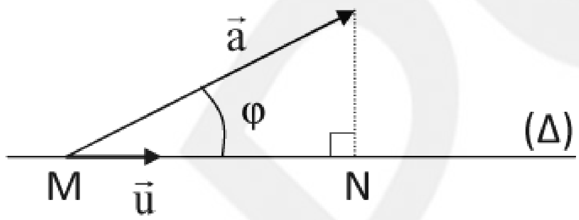
$$\cos\alpha = \frac{V_x}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{i}}{\|\vec{V}\|}; \quad \cos\beta = \frac{V_y}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{j}}{\|\vec{V}\|}; \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{\|\vec{V}\|} = \frac{\vec{V}\cdot\vec{k}}{\|\vec{V}\|}$$

I.6.4- APPLICATIONS

1- Projection orthogonale d'un vecteur $\vec{a}$ sur un axe (Δ) :

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de l'axe (Δ) : $\|\vec{u}\| = 1$. La projection de $\vec{a}$ sur l'axe (Δ) est :

$$\mathrm{Proj}_{(\Delta)}(\vec{a}) = MN = \vec{a}.\vec{u} = \|\vec{a}\|\cos\varphi$$



La projection orthogonale vectorielle est alors : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\mathrm{Proj}}_{(\Delta)}(\vec{a}) = \|\vec{a}\|\cos\varphi\,\vec{u}$

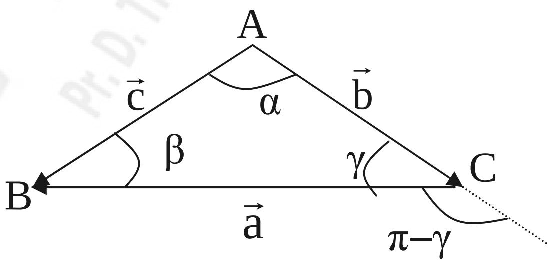
2/ Relation générale entre les côtés d'un triangle :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (Relation de Chasles)

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2a.b.\cos(\pi - \gamma)$

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\gamma}$

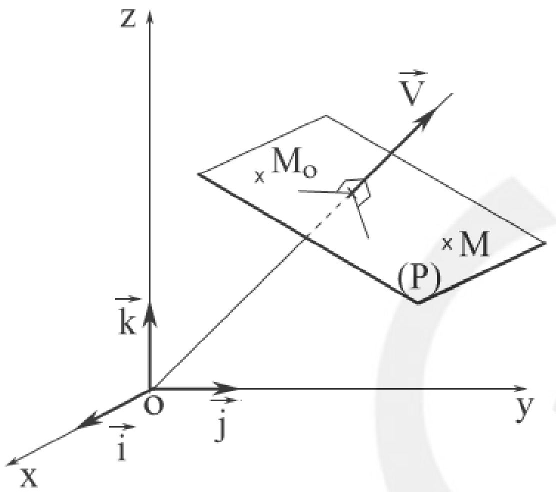


Cas particulier : γ = 90°, alors : $c^2 = a^2 + b^2$ (C'est le Théorème de Pythagore)

3/ Déterminer l'équation du plan (P) perpendiculaire au vecteur $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et passant par le point $M_o(x_o, y_o, z_o)$.

Tous les points $M(x, y, z)$ de l'espace, appartenant au plan (P), sont tels que : $\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{V}$, soit : $\overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{V} = 0$, d'où l'équation du plan (P) :

$$(x - x_o)a + (y - y_o)b + (z - z_o)c = 0$$

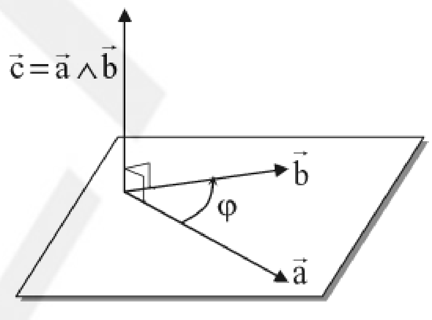


I.7- PRODUIT VECTORIEL

I.7.1- DEFINITION

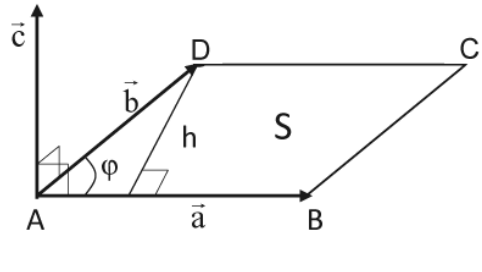
Le produit vectoriel d'un vecteur $\vec{a}$ par un vecteur $\vec{b}$ est le vecteur $\vec{c}$ noté $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- Support du vecteur $\vec{c}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{b}$, autrement dit $\vec{c}$ est porté par la droite perpendiculaire au plan formé par $(\vec{a}, \vec{b})$.
- Sens du vecteur $\vec{c}$: Le sens du vecteur $\vec{c}$ est donné par la « règle du tournevis », c'est-à-dire : lorsque l'on tourne l'outil de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ dans le sens contraire des aiguilles d'un montre, la vis monte et donne le sens du vecteur, et inversement.
- Module du vecteur $\vec{c}$: Il est égale à : $\|\vec{c}\| = \left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\|.\left\|\vec{b}\right\|.\sin\varphi, \quad \varphi = (\vec{a}, \vec{b})$



<u>Remarque</u> :

$\|\vec{c}\| = \left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\|.\left\|\vec{b}\right\|.\sin\varphi = \|\vec{a}\|.h = S_{ABCD}$, soit la surface du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



I.7.2- PROPRIETES

1/ Anticommutatif : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

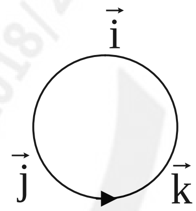
2/ Distributif par rapport à l'addition de vecteurs : $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$

3/ Associatif par rapport à la multiplication par un nombre réel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b})$$

4/ Non associatif : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$

5/ Condition de colinéarité : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$



6/ Permutation circulaire : un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit « direct » s'il vérifie la règle de permutation circulaire, c'est-à-dire :

$\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k}, \quad \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}, \quad \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

I.7.3- EXPRESSION ANALYTIQUE

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définis par leurs composantes dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ et $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

En appliquant les propriétés ci-dessus du produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$a_x\vec{i} \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) + a_y\vec{j} \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) + a_z\vec{k} \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$a_x\vec{i} \wedge b_x\vec{i} + a_x\vec{i} \wedge b_y\vec{j} + a_x\vec{i} \wedge b_z\vec{k} + a_y\vec{j} \wedge b_x\vec{i} + a_y\vec{j} \wedge b_y\vec{j} + a_y\vec{j} \wedge b_z\vec{k} + a_z\vec{k} \wedge b_x\vec{i} + a_z\vec{k} \wedge b_y\vec{j} + a_z\vec{k} \wedge b_z\vec{k} =$$
$$a_xb_x\vec{i} \wedge \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \wedge \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \wedge \vec{k} + a_yb_x\vec{j} \wedge \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \wedge \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \wedge \vec{k} + a_zb_x\vec{k} \wedge \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \wedge \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \wedge \vec{k} =$$
$$a_xb_x \times \vec{0} + a_xb_y\vec{k} + a_xb_z(-\vec{j}) + a_yb_x(-\vec{k}) + a_yb_y \times \vec{0} + a_yb_z\vec{i} + a_zb_x\vec{j} + a_zb_y(-\vec{i}) + a_zb_z \times \vec{0} =$$
$$(a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

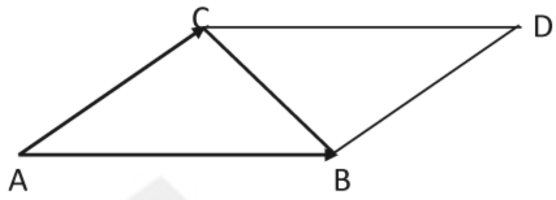
Cette expression peut être obtenue rapidement en utilisant un déterminant d'ordre 3, de la manière suivante :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\vec{k}$$

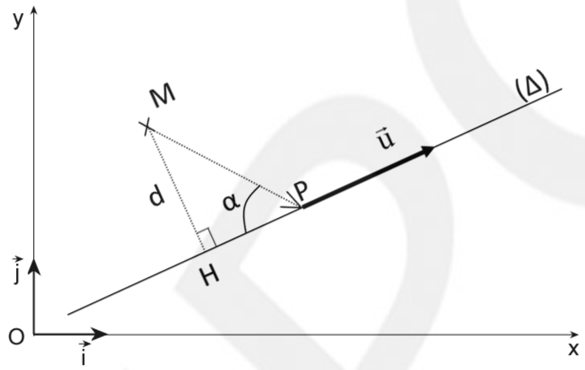
I.7.4- APPLICATIONS

1/ Calcul de la surface d'un triangle ABC : On a vu que $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ est l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc, l'aire du triangle ABC est :



$$S = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2}$$

2/ Dans un plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, calcul de la distance d'un point M(x,y) à une droite (Δ) qui passe par un point $P(x_o, y_o)$ et portant le vecteur $\vec{u}(a,b)$: $\overrightarrow{OP} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j}$ et $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.



D'une part, on a :

$$\left\|\overrightarrow{MP} \wedge \vec{u}\right\| = MP.\sqrt{a^2 + b^2}\sin\alpha = d\sqrt{a^2 + b^2}$$

Et d'autre part, on a :

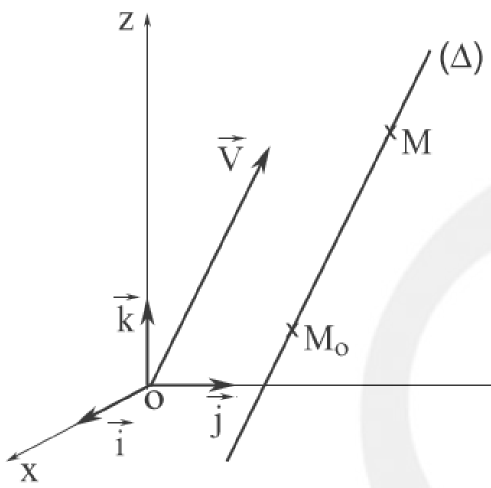
$$\overrightarrow{MP} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_o - x & y_o - y & 0 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \left[(x_o - x)b - (y_o - y)a\right]\vec{k}$$

$$\left\|\overrightarrow{MP} \wedge \vec{u}\right\| = \left|(x_o - x)b - (y_o - y)a\right|$$

D'où :
$$\left|(x_o - x)b - (y_o - y)a\right| = d\sqrt{a^2 + b^2}$$

Finalement, on en déduit :
$$\boxed{d = \frac{b(x_o - x) - a(y_o - y)}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

3/ Connaissant un point $M_o(x_o, y_o, z_o)$ et un vecteur $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par M_o et parallèle à $\vec{V}$.



La droite (Δ) est constituée des points $M(x, y, z)$ tels que : $\vec{V} // \overrightarrow{M_oM}$, soit $\overrightarrow{M_oM} \wedge \vec{V} = \vec{0}$. Donc :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} (y - y_o)c - (z - z_o)b = 0 \\ (x - x_o)c - (z - z_o)a = 0 \\ (x - x_o)b - (y - y_o)a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(y - y_o)}{b} = \dfrac{(z - z_o)}{c} \\ \dfrac{(x - x_o)}{a} = \dfrac{(z - z_o)}{c} \\ \dfrac{(x - x_o)}{a} = \dfrac{(y - y_o)}{b} \end{cases}$$

D'où l'équation de la droite (Δ) dans l'espace :

$$\frac{(x - x_o)}{a} = \frac{(y - y_o)}{b} = \frac{(z - z_o)}{c}$$

I.8- PRODUIT MIXTE

I.8.1- DEFINITION

Le produit mixte noté $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$:

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$

Ce scalaire, en valeur absolue, correspond au volume du triclinique construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. En effet :

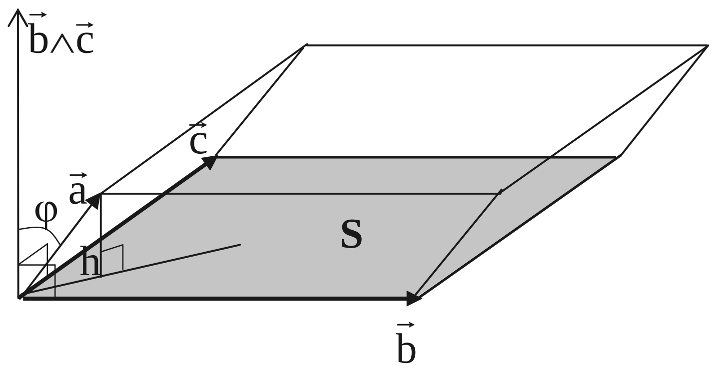
$\left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})\right| = \left\|\vec{a}\right\| . \left\|\vec{b} \wedge \vec{c}\right\| . \left|\cos\varphi\right|$

Dans la figure représentée ci-contre, on a :

$S = \left\|\vec{b} \wedge \vec{c}\right\|$

$h = \left\|\vec{a}\right\| \cos\varphi$

$V = S \times h = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})\right|$



I.8.2- PROPRIETES

1/ Permutation circulaire : $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})$

2/ Permutation des produits scalaire et vectoriel : $\mathbf{\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}}$ **.**

En effet, on a : $\mathbf{\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \mathbf{(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}}$. C'est la raison pour laquelle le produit mixte s'écrit simplement $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

3/ Le produit mixte $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est nul si :

- L'un des trois vecteurs est nul.
- Les trois vecteurs appartiennent au même plan (ils sont coplanaires). C'est la condition de coplanéité.

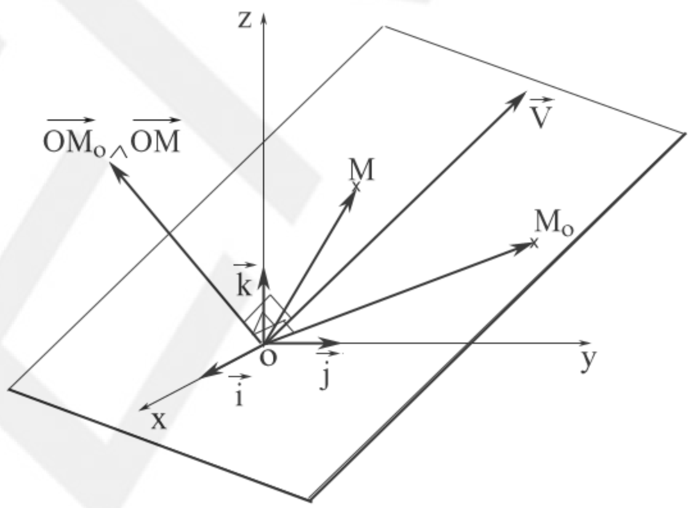
I.8.3- EXPRESSION ANALYTIQUE

On la détermine en calculant le déterminant suivant :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = a_x(b_y c_z - c_y b_z) - a_y(b_x c_z - c_x b_z) + a_z(b_x c_y - c_x b_y)$$

<u>Application</u> : Déterminer l'équation du plan (P) passant par l'origine O du repère et le point $M_o(x_o, y_o, z_o)$ et parallèle au vecteur $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.



Soit $M(x, y, z)$ un point arbitraire de (P), alors le vecteur $\overrightarrow{OM_o}\wedge\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire à (P) et donc perpendiculaire à $\vec{V}$, c'est-à-dire que les 3 vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_o}$ et $\vec{V}$ sont coplanaires, donc $\vec{V}\cdot(\overrightarrow{OM_o}\wedge\overrightarrow{OM}) = 0$, d'où l'équation du plan (P) :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_o & y_o & z_o \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(y_o z - z_o y) + b(xz_o - zx_o) + c(x_o y - y_o x) = Ax + By + Cz = 0$$

avec : $A = bz_o - cy_o$, $B = cx_o - az_o$, $C = ay_o - bx_o$

I.9- LE DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

C'est un vecteur noté $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et égal à : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a} \cdot \vec{b})$

I.10- LA DERIVATION VECTORIELLE

Soit une fonction scalaire λ(t) dépendant d'un paramètre t et deux fonctions vectorielles $\vec{V}_1(t)$ et $\vec{V}_2(t)$ dépendant du même paramètre t. On peut facilement démontrer analytiquement les relations suivantes :

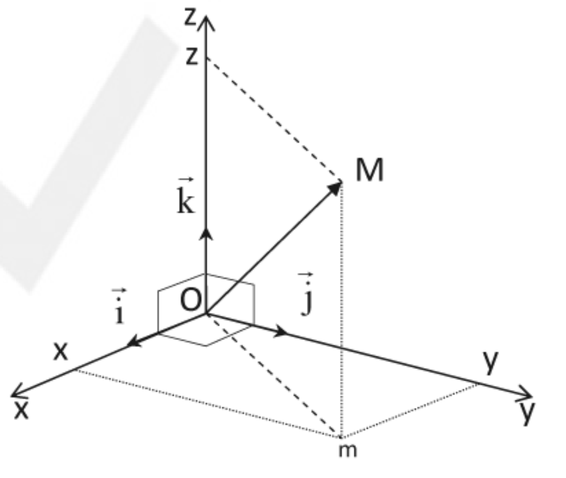
1) $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \frac{d}{dt}\vec{V}_1 + \frac{d}{dt}\vec{V}_2$	2) $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{V}) = \lambda\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\vec{V}$
3) $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot \frac{d}{dt}\vec{V}_2 + \vec{V}_2 \cdot \frac{d}{dt}\vec{V}_1$	4) $\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$

I.11- SYSTEMES DE COORDONNEES

I.11.1- COORDONNEES CARTESIENNES (x,y,z) DANS LE REPERE $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le repère cartésien a déjà été défini précédemment. On appelle coordonnées x, y et z d'un point M de l'espace affine, <u>les projections orthogonales</u> du vecteurs $\overrightarrow{OM}$ <u>sur les trois axes</u> Ox, Oy et Oz, portant les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ respectivement, soient : $x = \overrightarrow{OM}.\vec{i}$, $y = \overrightarrow{OM}.\vec{j}$ et $z = \overrightarrow{OM}.\vec{k}$.

et l'on a : $\overrightarrow{OM} = \vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Remarques :

1/ Dans l'expression $\vec{V} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (x, y, z) représentent les coordonnées cartésiennes du point M si l'origine du vecteur $\vec{V}$ est l'origine du repère, C'est-à-dire le point O.

2/ Les coordonnées de M peuvent être obtenues également de la manière suivante du fait que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + z\vec{k}$:

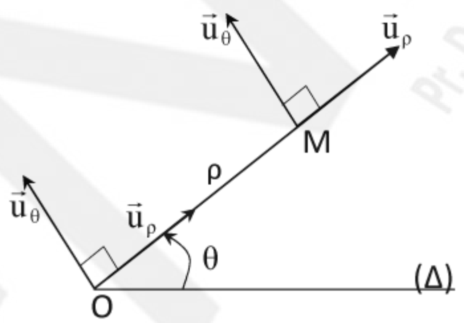
- On projette orthogonalement le point M sur le plan (xOy) : c'est le point m.
- On projette le vecteur $\overrightarrow{Om}$ orthogonalement sur Ox et Oy : on obtient respectivement x et y.
- On projette orthogonalement M sur Oz (parallèlement à Om) : on obtient z.

I.11.2- COORDONNEES POLAIRES (ρ,θ) DANS LE REPERE $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

a/ Définition des coordonnées polaires

Une autre façon de repérer un point dans un plan, nécessite simplement la connaissance d'une distance et d'un angle : les coordonnées polaires sont en effet définies par rapport à un axe fixe (Δ) passant par un point O fixe appelé « pôle ». Les coordonnées polaires du point M sont notées ρ et θ : $M(\rho, \theta)$ est tel que :

- $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in \mathbb{R}^+$ est la distance entre O et M, appelée « rayon polaire »,
- $\theta \in [0, 2\pi]$ est l'angle orienté entre (Δ) et $\overrightarrow{OM}$, appelé « angle polaire ».



b/ Définition du repère polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

La base du repère polaire est constituée de deux vecteurs notés $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ où :

- $\vec{u}_\rho$ est un vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$: $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho}$ appelé vecteur unitaire radial.
- $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire orthoradial tel que $\vec{u}_\rho . \vec{u}_\theta = 0$ donc perpendiculaire à $\vec{u}_\rho$ et dirigé dans le sens croissant de θ.

  Et l'on a l'expression du vecteur $\mathbf{\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho}$.

Remarque :

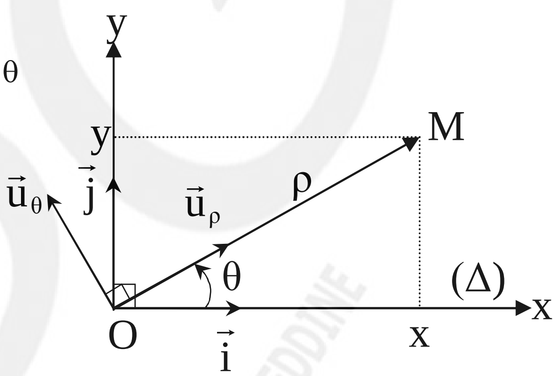
A la différence du repère cartésien $(\vec{i}, \vec{j})$ qui est un repère fixe, le repère polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est un repère local : on peut donc le représenter au pôle O, mais en pratique au point M.

c/ Relations de transfert entre le repère cartésien et le repère polaire

1/ Coordonnées

*Si ρ et θ sont connus, on cherche x et y :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \overrightarrow{OM}.\vec{i} = \rho\cos\theta \\ y = \overrightarrow{OM}.\vec{j} = \rho\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho\sin\theta \end{cases}$$

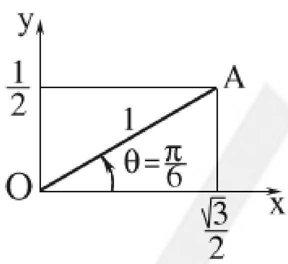
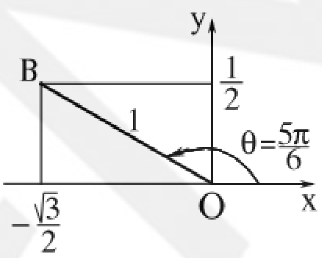
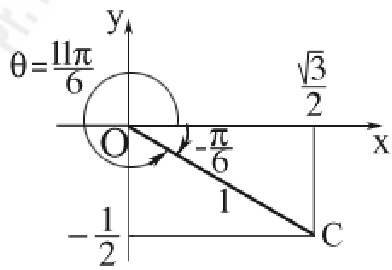


*Inversement, si x et y sont connus, on cherche ρ et θ :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Remarque :

L'angle θ est pris dans le sens positif à partir de l'axe polaire (Δ). Considérons les trois cas suivants :

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 	$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 	$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 
$*\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ $*\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$*\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ $*\ \operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$ Le θ polaire est : $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$ Car : $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$	$*\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ $*\ \operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$ Le θ polaire est : $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{11\pi}{6}}$ Car : $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$

2/ Vecteurs de base

Les composantes de $\vec{u}_\rho$ dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$ sont ses projections sur ces deux vecteurs, soit:

Sur Ox : $\vec{u}_\rho.\vec{i} = \|\vec{u}_\rho\| \times \|\vec{i}\| \times \cos(\vec{u}_\rho, \vec{i}) = \cos\theta$

Sur Oy : $\vec{u}_\rho.\vec{j} = \|\vec{u}_\rho\| \times \|\vec{j}\| \times \cos(\vec{u}_\rho, \vec{j}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

D'où l'expression de $\vec{u}_\rho$: $\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$

De même pour $\vec{u}_\theta$:

Sur Ox : $\vec{u}_\theta.\vec{i} = \|\vec{u}_\theta\| \times \|\vec{i}\| \times \cos(\vec{u}_\theta, \vec{i}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

Sur Oy : $\vec{u}_\theta.\vec{j} = \|\vec{u}_\theta\| \times \|\vec{j}\| \times \cos(\vec{u}_\theta, \vec{j}) = \cos\theta$

D'où l'expression de $\vec{u}_\theta$: $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

<u>Remarque</u> : $\vec{u}_\rho$ est un vecteur dont le module reste constant, mais son sens varie avec la variable θ ; on peut donc calculer sa dérivée par rapport à θ :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta$$

D'où : $\vec{u}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$

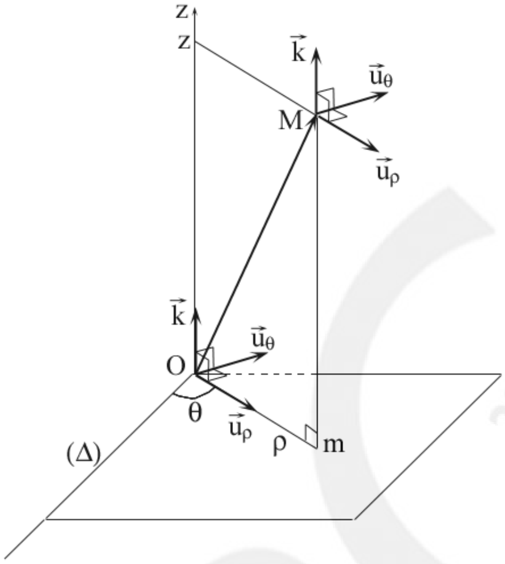
Donc, la dérivée du vecteur $\vec{u}_\rho$ par rapport à la variable angulaire θ lui est directement perpendiculaire et égale à $\vec{u}_\theta$: $\left(\dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta\right) \perp \vec{u}_\rho$.

I.11.3- COORDONNEES CYLINDRIQUES (ρ,θ,z) DANS LE REPERE $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

a/ Définition des coordonnées et du repère cylindriques

Les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace correspondent aux coordonnées polaires (ρ, θ) auxquelles on rajoute une troisième coordonnée appelée la côte (z) : $M(\rho, \theta, z)$, avec $\rho = \|\overrightarrow{Om}\|$.

Le repère cylindrique sera donc le repère orthonormé direct local $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrira donc dans ce repère : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$ et son module est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

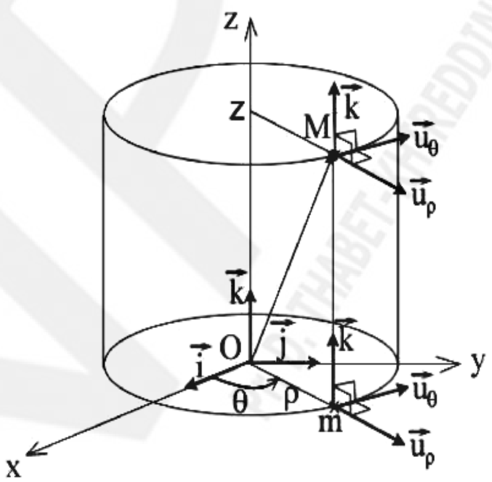


b/ Relations de transfert entre le repère cartésien et le repère cylindrique

1/ Coordonnées

$$M\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$M\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$



<u>Remarque</u> : Ici, ρ est le module de $\overrightarrow{Om}$ et non pas celui de $\overrightarrow{OM}$.

$$\rho = \left\|\overrightarrow{Om}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2/ Vecteurs de base

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{Om}}{\left\|\overrightarrow{Om}\right\|} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta \end{cases}$$

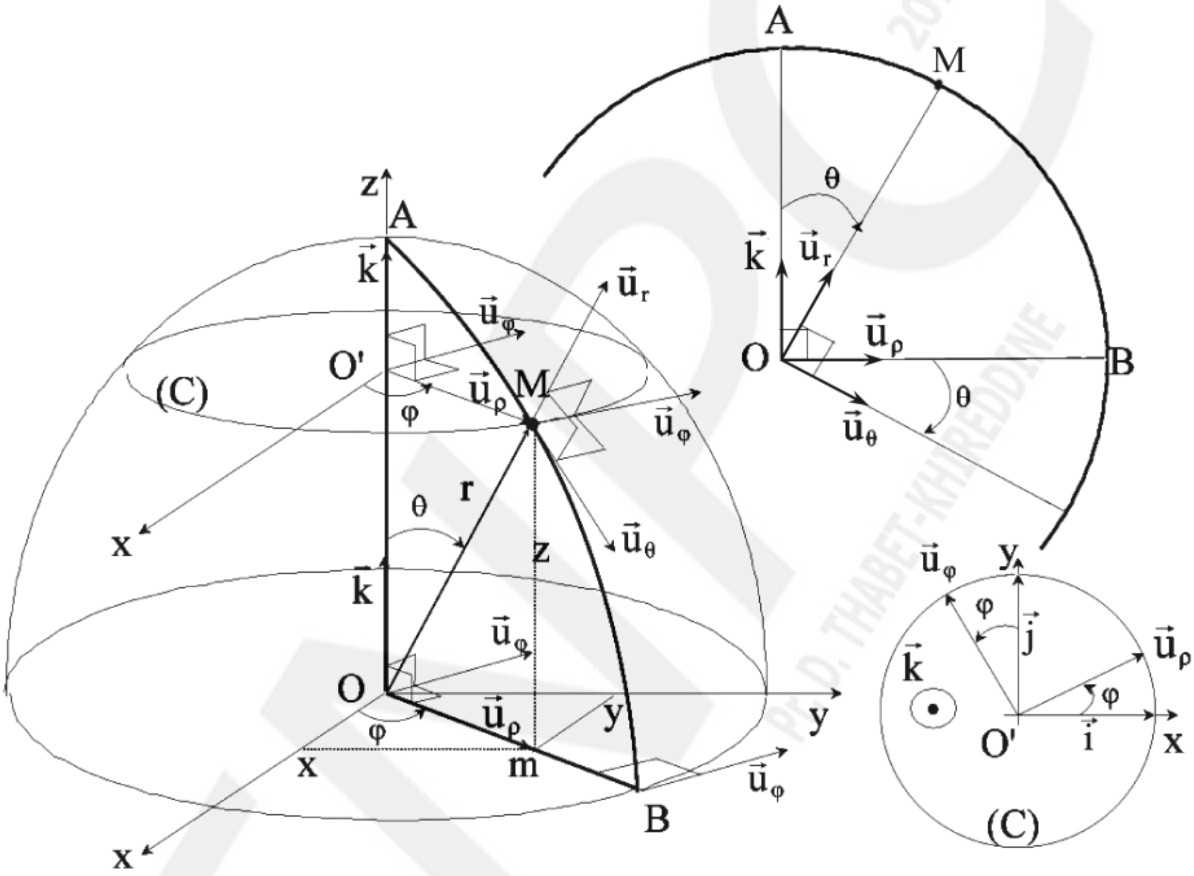
I.11.4- COORDONNEES SPHERIQUES (r, θ, φ) DANS LE REPERE $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

a/ Définition des coordonnées sphériques

$* \; r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|, \; r \in \mathbb{R}^+$

$* \; \theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM}), \; \theta \in [0, \pi]$

$* \; \varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{Om}), \; \overrightarrow{Om} = \mathrm{Proj}_{xOy}(\overrightarrow{OM}), \; \varphi \in [0, 2\pi]$



b/ Définition du repère sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

$\vec{u}_r$: vecteur unitaire radial : $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$

$\vec{u}_\theta$: vecteur unitaire tangent au méridien passant par M et orienté dans le sens croissant de θ.

$\vec{u}_\varphi$: vecteur unitaire tangent à la parallèle passant par M et orienté dans le sens croissant de φ.

Dans ce repère, on a : $\mathbf{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r}$

<u>Remarque</u> : le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est un trièdre direct.

c/ Relations de transfert entre le repère cartésien et le repère sphérique

1/ Coordonnées

On définit un vecteur auxiliaire dans le plan (xOy), noté $\vec{u}_\rho$ vecteur unitaire de $\overrightarrow{Om}$ de module ρ. On peut considérer le repère $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)$ comme un repère polaire : $\overrightarrow{Om} = \rho\vec{u}_\rho = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec $\vec{u}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$.

D'où les relations de transfert suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\rho}{z} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

2/ Vecteurs de base

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\vec{u}_\rho + \cos\theta\vec{k} = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\vec{u}_\rho \text{-} \sin\theta\vec{k} = \cos\theta\cos\phi\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\vec{j} \text{-} \sin\theta\vec{k} = \dfrac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta} \\ \vec{u}_\varphi = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{cases}$$